

DOTTORATO DI RICERCA IN  
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE ING-IND/13

Ciclo XXII

# **Sul comportamento dinamico di macchine fresatrici in alcune condizioni critiche di lavorazione**

Autore: **Ing. Nicolò Mancinelli**

Coordinatore:

**Prof. Vincenzo Parenti Castelli**

Relatore:

**Prof. Giuseppe Catania**



# INDICE

<b>Introduzione.....</b>	<b>1</b>
 <b>CAPITOLO 1: Il fenomeno del chatter in fresatura</b>	
1.1) Descrizione del fenomeno di chatter e delle sue implicazioni industriali.....	3
1.2) Modelli per lo studio del chatter nelle lavorazioni di fresatura.....	4
1.3) Strategie per diagnosticare, controllare o minimizzare l'insorgenza del chatter.....	7
 <b>CAPITOLO 2: Modelli per lo studio del chatter in fresatura</b>	
2.1) Descrizione del set-up sperimentale.....	10
2.2) Modello a 2 gdl e modello delle azioni di taglio: equazioni differenziali con ritardo.....	12
2.3) Metodo della semi discretizzazione.....	20
2.4) Validazione numerica del metodo della semi discretizzazione.....	25
2.5) Modello analitico-sperimentale a $n$ gdl.....	27
 <b>CAPITOLO 3: Identificazione e validazione sperimentale dei modelli del chatter in fresatura</b>	
3.1) Misura delle azioni di taglio.....	35
3.2) Identificazione dei modelli modali sperimentali.....	37
3.3) Simulazioni numeriche e validazione sperimentale del modello a 2 gdl.....	40
3.4) Simulazioni numeriche e validazione sperimentale del modello a $n$ gdl.....	50
 <b>CAPITOLO 4: Monitoraggio e diagnostica della vibrazione di chatter in fresatura</b>	
4.1) Sviluppo di un sistema di diagnostica real-time per la vibrazione di chatter.....	56
 <b>Conclusioni.....</b>	 <b>63</b>
 <b>Bibliografia.....</b>	 <b>65</b>

## Introduzione

Questa tesi affronta lo studio di una tipologia di vibrazione autoeccitata, nota come chatter, che si manifesta nei processi di lavorazione ad asportazione di truciolo ed in particolare nelle lavorazioni di fresatura. La tesi discute inoltre lo sviluppo di una tecnica di monitoraggio e diagnostica del chatter basato sul rilievo di vibrazioni.

Il fenomeno del chatter è caratterizzato da violente oscillazioni tra utensile e pezzo in lavorazione ed elevate emissioni acustiche. Il chatter, se non controllato, causa uno scadimento qualitativo della finitura superficiale e delle tolleranze dimensionali del lavorato, una riduzione della vita degli utensili e dei componenti della macchina. Questa vibrazione affligge negativamente la produttività e la qualità del processo di lavorazione e pregiudica l'interazione uomo-macchina-ambiente. Per una data combinazione di macchina, utensile e pezzo lavorato, i fattori che controllano la velocità di asportazione del materiale sono gli stessi che controllano l'insorgenza del chatter: la velocità di rotazione del mandrino, la profondità assiale di passata e la velocità di avanzamento dell'utensile.

Per studiare il fenomeno di chatter, con l'obiettivo di individuare possibili soluzioni per limitarne o controllarne l'insorgenza, vengono proposti in questa tesi alcuni modelli del processo di fresatura. Tali modelli comprendono il modello viscoelastico della macchina fresatrice e il modello delle azioni di taglio.

Per le azioni di taglio è stato utilizzato un modello presente in letteratura, mentre per la macchina fresatrice sono stati utilizzati modelli a parametri concentrati e modelli modali analitico-sperimentali. Questi ultimi sono stati ottenuti accoppiando un modello modale sperimentale del telaio, completo di mandrino, della macchina fresatrice con un modello analitico, basato sulla teoria delle travi, dell'utensile.

Le equazioni del moto, associate al processo di fresatura, risultano essere equazioni differenziali con ritardo a coefficienti periodici o PDDE (Periodic Delay Differential Equations). È stata implementata una procedura numerica per mappare, nello spazio dei parametri di taglio, la stabilità e le caratteristiche spettrali (frequenze caratteristiche della vibrazione di chatter) delle equazioni del moto associate ai modelli del processo di fresatura proposti.

Per testare i modelli e le procedure numeriche proposte, una macchina fresatrice CNC 4 assi, di proprietà del Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche Nucleari e Metallurgiche (DIEM) dell'Università di Bologna, è stata strumentata con accelerometri, con una tavola dinamometrica per la misura delle forze di taglio e con un adeguato sistema di acquisizione. Eseguendo varie prove di lavorazione sono stati identificati i coefficienti di pressione di taglio contenuti nel modello delle forze di taglio. Sono stati condotti, a macchina ferma, rilievi di FRFs (Funzioni Risposta in Frequenza) per identificare, tramite tecniche di analisi modale sperimentale, i modelli del solo telaio e della macchina fresatrice completa di utensile. I segnali acquisiti durante le numerose prove di lavorazione eseguite, al variare dei parametri di taglio, sono stati analizzati per valutare la stabilità di ciascun punto di lavoro e le caratteristiche spettrali della vibrazione associata. Questi risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti applicando la procedura numerica proposta ai diversi modelli di macchina fresatrice implementati.

Sono state individuate le criticità della procedura di modellazione delle macchine fresatrici a parametri concentrati, proposta in letteratura, che portano a previsioni erranee sulla stabilità delle lavorazioni.

È stato mostrato come tali criticità vengano solo in parte superate con l'utilizzo dei modelli modali analitico-sperimentali proposti.

Sulla base dei risultati ottenuti, è stato proposto un sistema automatico, basato su misure accelerometriche, per diagnosticare, in tempo reale, l'insorgenza del chatter durante una lavorazione. È stato realizzato un prototipo di tale sistema di diagnostica il cui funzionamento è stato provato mediante prove di lavorazione eseguite su due diverse macchine fresatrici CNC.

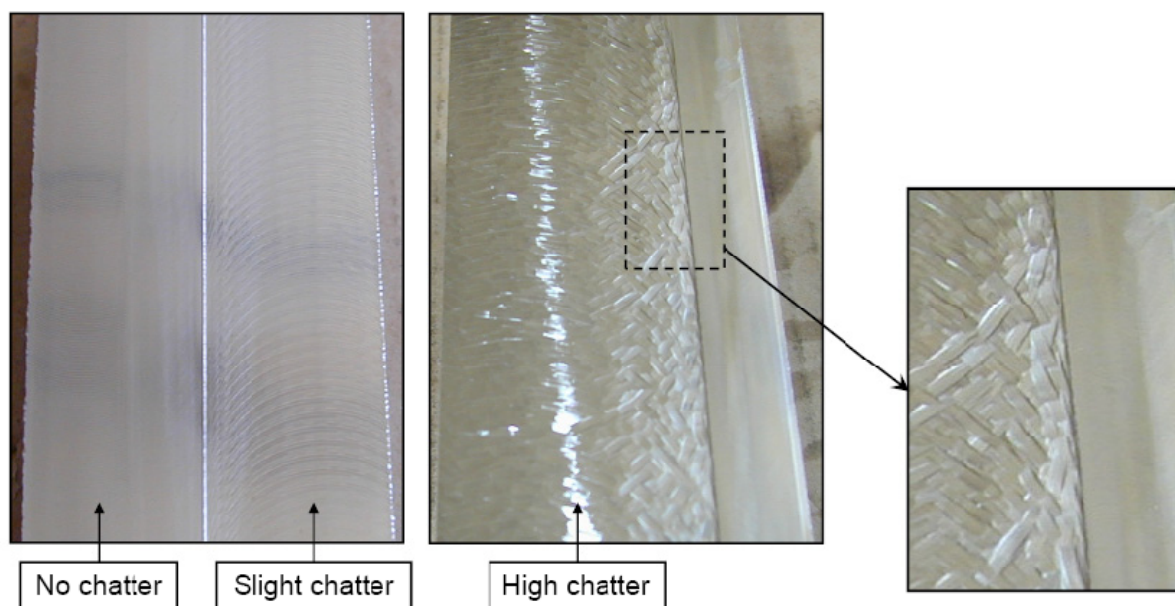
# CAPITOLO 1

## Il fenomeno del chatter in fresatura

### 1.1) Descrizione del fenomeno di chatter e delle sue implicazioni industriali

La crescente competizione in ambito industriale ha implicato una riduzione dei costi ed un incremento della qualità nell'industria manifatturiera. Le lavorazioni ad asportazione di truciolo sono tra i processi manifatturieri più utilizzati. L'efficienza di tali lavorazioni è influenzata dalla velocità di asportazione di materiale, dal tempo ciclo, dai tempi morti di processo (ad esempio cambi utensili o bloccaggi del pezzo) e dall'usura degli utensili. L'ottimizzazione di tali parametri senza sacrificare la qualità del lavorato è di primaria importanza. Il chatter è un problema di instabilità dei processi di lavorazione ad asportazione di truciolo. Tale fenomeno è caratterizzato da violente vibrazioni tra utensile e pezzo in lavorazione ed elevate emissioni acustiche. Il chatter, se non controllato, causa uno scadimento qualitativo della finitura superficiale (Figura 1) e delle tolleranze dimensionali del lavorato, una riduzione della vita degli utensili e dei componenti della macchina utensile. Questa vibrazione affligge negativamente la produttività e la qualità del processo di lavorazione e pregiudica anche l'interazione uomo-macchina-ambiente.

Il problema del chatter è noto alla comunità manifatturiera legata alle lavorazioni del metallo, sin dagli inizi del 1900 ed è ancora oggi un popolare argomento di ricerca industriale ed accademica. Il chatter è una vibrazione auto-eccitata legata alla alta produttività del processo di taglio, ovvero quando cresce la velocità di asportazione del materiale. In generale il chatter è uno dei fattori limitanti più critici da tenere in considerazione quando si progetta un processo di taglio.



**Figura 1** Effetti di diversi livelli di chatter su lavorazioni di fresatura.

Nell'industria manifatturiera moderna, i processi di fresatura ad alta velocità giocano un ruolo molto importante. Alcuni esempi sono la fabbricazione di componenti in larga scala per l'industria automotive o la realizzazione di stampi e componenti per l'industria aeronautica dove grandi quantità di materiale vengono rimosse da grandi strutture. Il processo di fresatura è tanto più efficiente e produttivo quanto più è alta la velocità di asportazione del materiale, mantenendo però una adeguata finitura superficiale.

Per una data combinazione di macchina, utensile e pezzo lavorato, i fattori che controllano la velocità di asportazione del materiale sono gli stessi che controllano l'insorgenza del chatter: la velocità di rotazione del mandrino, la profondità assiale di passata e la velocità di avanzamento dell'utensile.

## **1.2) Modelli per lo studio del chatter nelle lavorazioni di fresatura**

Nei processi di taglio che coinvolgono la rotazione dell'utensile o del pezzo lavorato, l'instabilità di chatter è causata dal cosiddetto effetto rigenerativo: le vibrazioni forzate che si generano tra pezzo e taglienti lasciano delle ondulazioni sulla superficie lavorata le quali influenzano lo spessore di truciolo asportato nelle successive passate, generando ulteriori vibrazioni e lasciando nuove ondulazioni sul pezzo. L'individuazione del meccanismo rigenerativo come causa principale del chatter si deve ai lavori di Tobias [63] e Tlusty [38] risalenti ai primi anni '60. In questi lavori viene per la prima volta introdotto un modello del meccanismo rigenerativo basato sull'introduzione, nelle equazioni dinamiche del sistema, di un termine in ritardo  $\tau$  (ovvero il tempo che intercorre tra il passaggio di un tagliente e il successivo). In questo modello lo spessore di truciolo asportato (e quindi la forza di taglio ad esso proporzionale) all'istante  $t$  dipende dallo spessore di truciolo asportato all'istante  $t-\tau$ . Le equazioni del moto del sistema non sono più differenziali ordinarie (ODEs), ma diventano equazioni differenziali con ritardo (DDEs). Studiando la stabilità delle equazioni DDEs associate al processo di taglio è possibile ottenere una mappa in uno spazio bidimensionale dei parametri di taglio, ad esempio velocità angolare del mandrino e profondità di passata, delle condizioni di lavoro che rendono il processo instabile, e che quindi generano le vibrazioni di chatter. Nei lavori di Tobias e Tlusty la macchina utensile viene modellata come un sistema viscoelastico lineare ad 1 gdl (grado di libertà), le mappe di stabilità che ottengono hanno una caratteristica forma a lobi: per questo, ancora oggi, ci si riferisce ad essi come diagrammi di stabilità a lobi (SLD).

Gli studi di Tlusty e Tobias sull'instabilità dei processi di tornitura possono essere considerati, con buona approssimazione, validi ancora oggi, non si può dire altrettanto per quelli riguardanti il processo di fresatura. I modelli utilizzati per le azioni di taglio in fresatura risultano troppo semplificati: la fresatura è un processo di taglio interrotto (non è detto che ci sia sempre un tagliente in presa) molto diverso dalla tornitura che è un processo di taglio continuo (c'è sempre un tagliente in presa). Un modello delle azioni di taglio in fresatura, che tiene conto della natura periodica e interrotta di tali forze, è stato presentato da Altintas [1] solo di recente. Questo modello, ampiamente validato sperimentalmente [28], è diventato uno standard per il nuovo filone di studi sul chatter in fresatura che si è sviluppato a partire dalla fine degli anni '90. L'adozione del nuovo modello delle forze di taglio ha implicato un importante cambiamento nelle equazioni descrittive del processo di fresatura: le DDEs a coefficienti costanti sono diventate delle PDDEs ovvero equazioni differenziali con ritardo a coefficienti tempo varianti periodicamente. L'analisi di stabilità di questa tipologia di equazioni ha richiesto lo studio di nuove tecniche numeriche diverse quelle utilizzate

per le DDEs, la cui la stabilità può essere mappata sfruttando i criteri di stabilità classica basati sull'analisi degli autovalori. Il tentativo di applicare alle PDDEs i metodi per mappare la stabilità del sistema utilizzati per le DDEs è stato presentato dallo stesso Altintas in [1] e [6] e si è rilevato inaccurato, specialmente in condizioni di taglio a bassa immersione radiale [48]. Si sono sviluppate due tipologie di approcci allo studio di stabilità per le PDDEs: il TFEA (Temporal Finite Element Analysis) del gruppo statunitense di Mann, Davies, Pratt e altri e il metodo SD (Semi Discretization) del gruppo ungherese di Insperger, Stépán e altri. Il modello su cui è basato il metodo TFEA [10] e [46] comprende due diversi sistemi di equazioni (entrambi a 1 o 2 gdl) che si alternano nel tempo: il primo simula il comportamento del sistema quando il tagliente è in presa (vibrazione forzata), il secondo simula il comportamento del sistema quando il tagliente non è in presa (vibrazione libera). Utilizzando delle funzioni di base (polinomi di Hermite o di Chebyshev) è possibile ricavare una soluzione approssimata, valida per entrambi i sistemi, dalla quale, tramite discretizzazione temporale, si ottiene una mappa che approssima la matrice di transizione del sistema. Questa matrice fornisce la relazione tra gli stati del sistema in due generici istanti di tempo. Nella matrice di transizione sono contenute tutte le informazioni sulla stabilità del sistema, è quindi possibile ricavare lo SLD del processo di fresatura.

Il metodo SD [34], [35], [60] è simile al TFEA: tramite una discretizzazione temporale si costruisce una mappa della matrice di transizione del sistema dalla quale si ricava la mappa di stabilità. In questo caso però il sistema è modellato con un solo set di equazioni e il termine in ritardo è approssimato come una somma pesata dei due stati discreti vicini. Entrambi gli approcci sono basati sulla teoria di Floquet [21] la quale ha stabilito il principio di stabilità asintotica per le equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici; tale principio è basato sullo studio dei moltiplicatori caratteristici del sistema su un periodo, ovvero gli autovalori della matrice di transizione del sistema.

I metodi SD e TFEA sono stati confrontati sia numericamente che sperimentalmente [30], [31] e si sono rivelati pressoché equivalenti. Questi metodi hanno contribuito significativamente a comprendere più a fondo il fenomeno del chatter in fresatura rispetto a quanto fatto in precedenza. Grazie a questi metodi si è scoperto che il chatter in fresatura può essere la manifestazione di due tipologie di biforcazioni [45] (e non a una sola come si pensava in precedenza [6]): una biforcazione di Hopf, associata ad un moto quasi-periodico, e una biforcazione flip (o period doubling), associata ad un moto periodico. Questo importante risultato ha portato all'individuazione delle frequenze multiple di chatter [32], [33], [36] e a nuovi diagrammi di stabilità a lobi, la cui forma risulta differente da quella trovata negli studi precedenti.

I metodi SD e TFEA sono stati applicati a modelli semplificati di macchine fresatrici a 1 e 2 gdl, e quindi, per essere validati sperimentalmente, sono state realizzate delle attrezzature ad hoc tali da concentrare la cedevolezza della macchina fresatrice rendendola simile ad una struttura a 1 o 2 gdl [29], [31], [33]. Non ci sono ad oggi in letteratura lavori in cui si sia cercato di applicare i metodi SD e TFEA a modelli di macchine fresatrici a più gdl. Sono stati studiati, tramite questi metodi, l'effetto sulla stabilità di un ritardo variabile [43], indotto dalla variazione istantanea della velocità angolare del mandrino, e dell'utilizzo di utensili elicoidali [47], [52]. I risultati di questi studi non divergono molto dai precedenti, ovvero l'effetto di piccole variazioni del ritardo è del tutto trascurabile, mentre l'utilizzo di frese elicoidali implica un cambiamento nelle forme dei lobi dei diagrammi di stabilità.

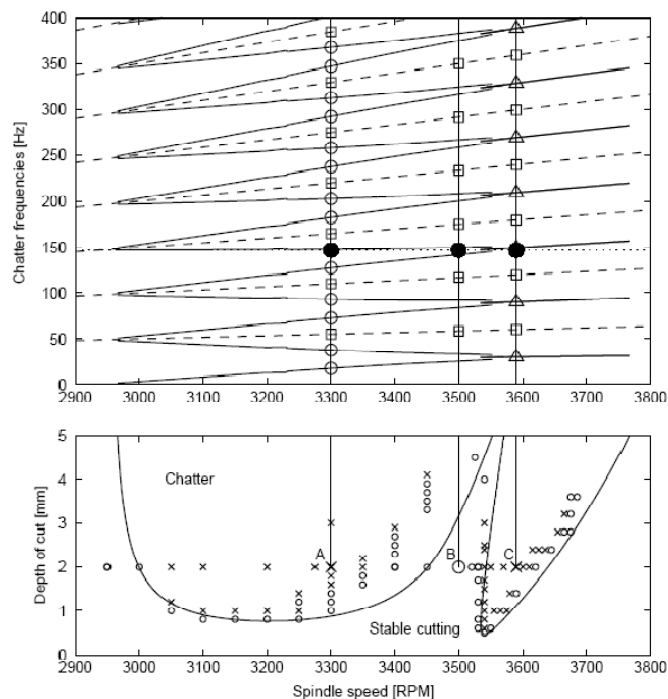
Negli ultimi anni, si è sviluppato anche un filone di studi su metodi per modellare il comportamento dinamico di macchine fresatrici reali ai quali però sono stati applicati solo i metodi DDEs classici per mappare la stabilità (con le inesattezze che ne conseguono).



I lavori di Gagnol e Bouzgarrou [22], [23] sono focalizzati su un modello ad elementi finiti (FEM) del mandrino, accoppiato a dei supporti elastici che simulano i cuscinetti, che tiene conto degli effetti giroscopici indotti dalla rotazione, attorno al suo asse, in condizioni di lavoro. Si è visto che gli effetti giroscopici, a velocità di rotazione elevate, inducono delle variazioni significative sulle funzioni risposta in frequenza (FRF) della macchina utensile e, di conseguenza, influiscono sui diagrammi di stabilità della macchina.

Le variazioni nello spessore di truciolo, causa dell'innesco del chatter, sono indotte da spostamenti relativi tra pezzo e utensile. Per lo studio di stabilità di lavorazioni su pezzi in parete sottile occorre modellare la cedevolezza dinamica sia dell'utensile che del pezzo: in [44] e [57] vengono proposti approcci FEM per affrontare questo caso particolare. In [7], [51] vengono proposti modelli di macchina utensile ottenuti accoppiando un modello sperimentale del telaio della macchina fresatrice (ottenuto tramite rilievi sperimentali sul telaio della macchina senza mandrino) con un modello FEM dettagliato del gruppo mandrino-utensile.

Le FRFs (Funzioni Risposta in Frequenza), ottenute dal modello assemblato, in corrispondenza della punta dell'utensile mostrano una buona corrispondenza con quelle misurate sperimentalmente. In questo lavoro viene messa in evidenza la forte influenza della cedevolezza del telaio della macchina fresatrice sulla cedevolezza dinamica in corrispondenza della punta dell'utensile. Budak e Erturk [12], [13], [14], [50] propongono alcuni modelli del gruppo mandrino-utensile basati sulle equazioni della trave di Timoshenko a sezione variabile accoppiata a supporti elastici. Le FRFs del modello risultano congruenti con quelle sperimentali ottenute dal gruppo mandrino-utensile in condizioni libere, mancano però metodi e dati sull'accoppiamento del gruppo al telaio della macchina utensile.



**Figura 2** Diagramma di stabilità (sotto) e diagramma delle frequenze di chatter (sopra) per un processo di fresatura ottenuti con il metodo SD [45]. Punto A: chatter associato a una biforcazione di tipo Hopf. Punto B: stabile. Punto C: chatter associato a una biforcazione di tipo Period Doubling. Figura tratta da [33].

Analogamente in [55] vengono utilizzate le equazioni della trave di Eulero-Bernoulli per modellare l'utensile ma la macchina utensile, a cui si accoppia la trave tramite vincoli elastici, viene considerata infinitamente rigida.

Infine in [65] viene presentato un modello di macchina fresatrice puramente sperimentale ottenuto mediante tecniche di analisi modale operativa (OMA), ovvero utilizzando rilievi accelerometrici acquisiti sulla macchina durante normali lavorazioni. Mediante questo approccio è possibile ottenere un buon modello della macchina nella configurazione presa in esame, ovviamente anche un semplice cambio utensile richiede una nuova fase di identificazione. Alla luce degli studi presenti in letteratura sul chatter in fresatura, si può affermare che esistono metodi affidabili per lo studio di stabilità del processo di taglio (TFEA e SD), ma la loro applicazione industriale richiede modelli adeguati a cogliere il comportamento dinamico dell'insieme telaio – mandrino – utensile di una macchina fresatrice reale. Inoltre, sarebbe opportuno rendere tali modelli sufficientemente modulari al fine di poter simulare con facilità i frequenti cambi utensile che avvengono nei moderni centri di lavoro.

### 1.3) Strategie per diagnosticare, controllare o minimizzare l'insorgenza del chatter

Grazie agli studi hanno cercato di spiegare il funzionamento del fenomeno del chatter, sono state proposte numerose strategie per diagnosticare, controllare o minimizzare l'insorgenza di tale instabilità. Alcune strategie consistono nella modifica strutturale dei componenti della macchina fresatrice o l'applicazione ad essa di varie tipologie di smorzatori, attivi e passivi, e di attuatori di vario genere.

In [2] viene proposta la modifica della forma dell'utensile, modellato come trave *stepped*, per minimizzare la vibrazione della punta, la macchina viene modellata come un incastro infinitamente rigido. I risultati ottenuti dimostrano una scarsa influenza sulla stabilità del processo.

In [54] viene analizzato il contributo di un *tuned viscoelastic damper* (TVD) passivo, applicato al pezzo in lavorazione, sull'ampiezza di vibrazione della macchina fresatrice in condizioni operative. Questo approccio consente di modificare la funzione risposta in frequenza del sistema e quindi anche le caratteristiche di stabilità in alcune condizioni. Tuttavia manca una valutazione sull'effetto globale dei TVD sulla stabilità del sistema in un range ampio di parametri di funzionamento. Inoltre questo approccio risulta difficilmente applicabile dal punto di vista industriale poiché richiede un dimensionamento del TVD adeguato al particolare pezzo in lavorazione e al particolare utensile utilizzato.

In [24] e [25] viene studiato l'effetto sulla stabilità del processo di fresatura di un *active mass damper* (AMD) applicato sul mandrino della macchina utensile. Teoricamente il sistema, opportunamente controllato, riesce ad incrementare la regione stabile di taglio in una banda limitata di velocità angolare del mandrino, ma manca una vera e propria conferma sperimentale del suo effettivo funzionamento.

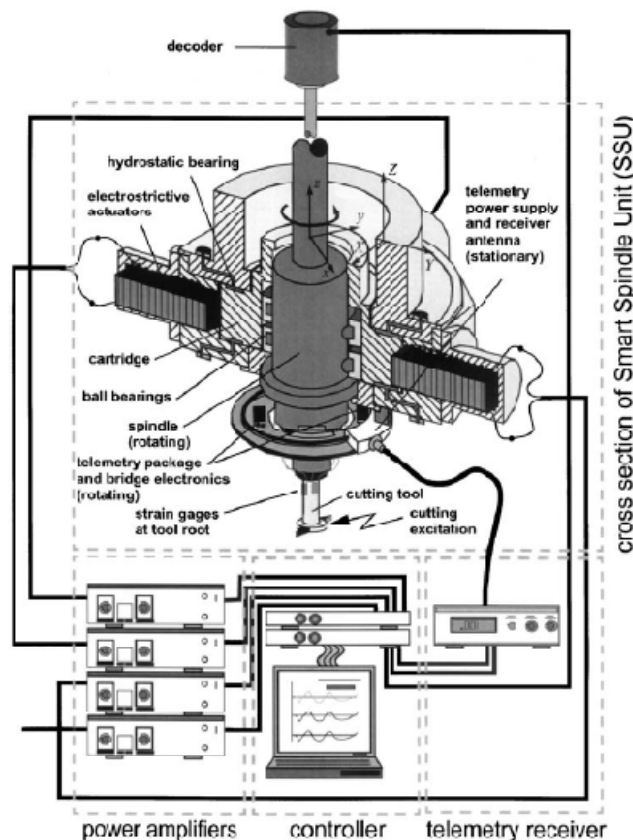
In [11] l'incremento della regione stabile del processo di taglio viene ottenuta tramite degli attuatori di materiale *electrostrictive* (cambia forma sottoposto ad una tensione elettrica) posti in prossimità dei cuscinetti del mandrino con i quali è possibile variare lo smorzamento del sistema (Figura 3). Gli attuatori vengono controllati in *loop* chiuso tramite segnali provenienti da estensimetri posti sull'utensile. In [59] viene presentato un approccio analogo ma utilizzando attuatori di tipo piezoelettrico posti direttamente

sull'utensile. In questi casi l'aumento di stabilità è considerevole ma i costi, le complicazioni costruttive e gli ingombri del sistema lo rendono scarsamente applicabile in larga scala industriale.

In [4] e [5] viene analizzato l'effetto sulla stabilità del processo della variazione, durante la lavorazione, dell'angolo di pitch tra i taglienti della fresa. Il sistema viene modellato a parametri concentrati, l'incremento di stabilità del processo risulta modesto in relazione alle complicazioni costruttive che implica l'attuazione, oleodinamica, che varia l'angolo di pitch tra i taglienti. Altre strategie sono focalizzate sulla diagnostica *real-time* del chatter e del suo controllo attraverso la variazione opportuna dei parametri di taglio, ad esempio velocità di rotazione del mandrino.

In [3] viene proposta un algoritmo per trovare la velocità di rotazione del mandrino che massimizza l'asportazione di truciolo. L'algoritmo si basa su un indice di diagnostica per il chatter, ottenuto dal trattamento con opportuno filtraggio di un segnale proveniente da un microfono posto in prossimità dell'area di lavoro. Il segnale filtrato viene analizzato secondo una logica di tipo *fuzzy* che produce un funzionale che indica l'insorgenza del chatter. Questo indice guida una strategia di variazione della velocità angolare del mandrino che, in base alla frequenza principale di chatter stimata dal sistema, cerca le aree di lavoro a maggiore asportazione di truciolo.

Anche in [41] e [49] vengono presentati approcci di tipo *fuzzy* per generare un indicatore di chatter, solo che in questo caso si utilizzano sensori di accelerazione e vengono calcolate l'energia della vibrazione e il picco dello spettro di accelerazione.



**Figura 3** Schema costruttivo di un mandrino con attuatori, tratto dall'articolo [11], per controllare la vibrazione di chatter.

Questo approccio risulta alquanto limitato poiché l'energia della vibrazione di taglio varia molto in base al tipo di lavorazione eseguita: questo implica una fase di taratura, che può risultare onerosa in termini di tempo e di risorse, per ciascuna tipologia di lavorazione da eseguire.

In [16], [18] e [19] viene proposta una strategia per diagnosticare l'insorgenza del chatter basata sulla demodulazione di segnali di accelerazione o di intensità sonora proveniente da sensori posti nella zona di lavoro. Questa tecnica sembra riuscire a diagnosticare l'insorgenza del chatter ma manifesta alcuni problemi: una scarsa prontezza della diagnosi, dovuta al ritardo indotto dai 5 stadi di filtraggio digitale necessari per effettuare la demodulazione, e la necessità di scegliere a priori (in una fase di *tuning* del sistema) l'armonica della velocità di rotazione predominante su cui effettuare l'analisi. L'autore propone, basandosi su questa strategia di diagnostica, una logica di variazione della velocità angolare del mandrino analoga a quella proposta in [3].

Varie tipologie di indicatori per la diagnostica del chatter vengono proposti anche in [39], [40] e [64]. L'approccio proposto prevede l'utilizzo simultaneo di sensori di accelerazione e di forza. I segnali provenienti dai sensori vengono scomposti tramite *wavelet* e analizzati con tecniche statistiche, la classificazione di queste informazioni viene affidata ad una logica di tipo *neural network* in grado di diagnosticare l'insorgenza del chatter. Anche questo tipo di approccio, come quelli basati su logica *fuzzy*, necessita di una fase preliminare di taratura la cui validità generale, ovvero il corretto funzionamento per ogni tipologia di lavorazione, non è garantito.

Dopo l'analisi dello stato dell'arte, è possibile affermare che non esiste ad oggi una strategia affidabile, economica, funzionante per ogni tipo di lavorazione di fresatura e che non necessiti di una lunga fase di taratura per diagnosticare, controllare o minimizzare l'insorgenza delle vibrazioni di chatter. Le strategie più promettenti dal punto di vista industriale sembrano essere quelle basate su un indice di diagnostica del chatter in grado di guidare un processo automatico di selezione dei parametri di taglio ottimali.

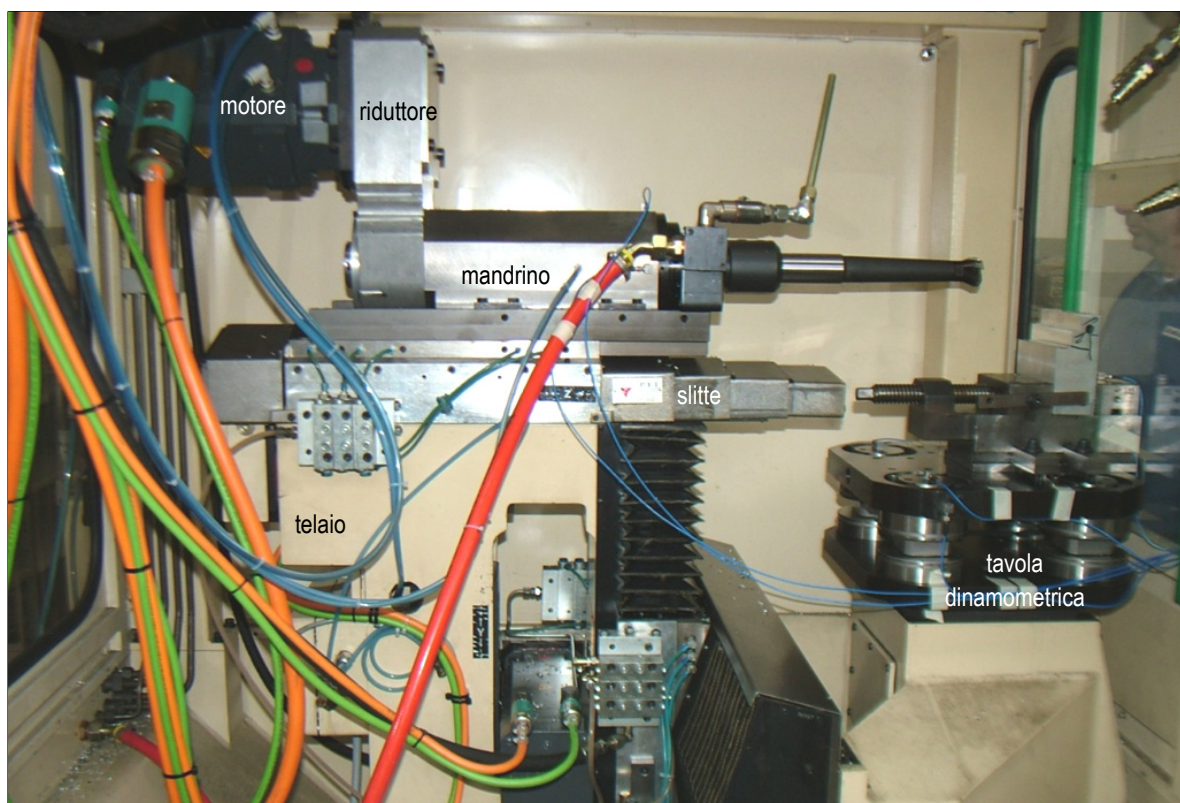
## CAPITOLO 2

### Modelli per lo studio del chatter in fresatura

#### 2.1) Descrizione del set-up sperimentale

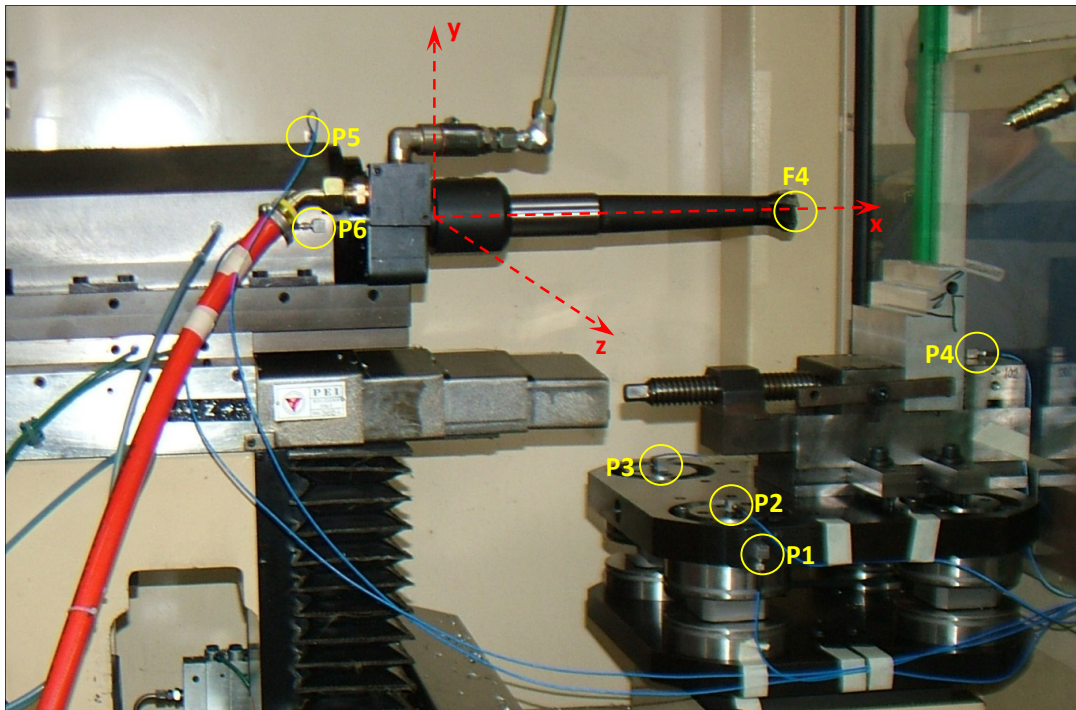
La validazione e l'identificazione dei modelli sul chatter in fresatura, che verranno introdotti in questa dissertazione, sono state realizzate tramite un'estesa campagna di prove sperimentali eseguite su una macchina fresatrice CNC (controllo numerico) a 4 assi controllati. Questa macchina, rappresentata nella foto in Figura 4, è di proprietà del DIEM (Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche Nucleari e Metallurgiche dell'Università di Bologna) che ha commissionato la sua realizzazione all'azienda costruttrice di centri di lavoro Giuliani (del gruppo Bucci Industries) di Quarto Inferiore (BO).

L'asse del mandrino è orizzontale ed è accoppiato al telaio tramite tre slitte, attuate idraulicamente, con corse massime di 200 mm sull'asse  $x$ , 300 mm sull'asse  $y$  e 350 mm sull'asse  $z$ . La velocità angolare massima raggiungibile dall'albero del mandrino è di 6000 rpm; il motore asse mandrino, l'azionamento e il controllo numerico sono prodotti da Siemens. La velocità angolare dell'utensile viene ricavata dalla velocità angolare misurata da un encoder, posto sull'albero motore.

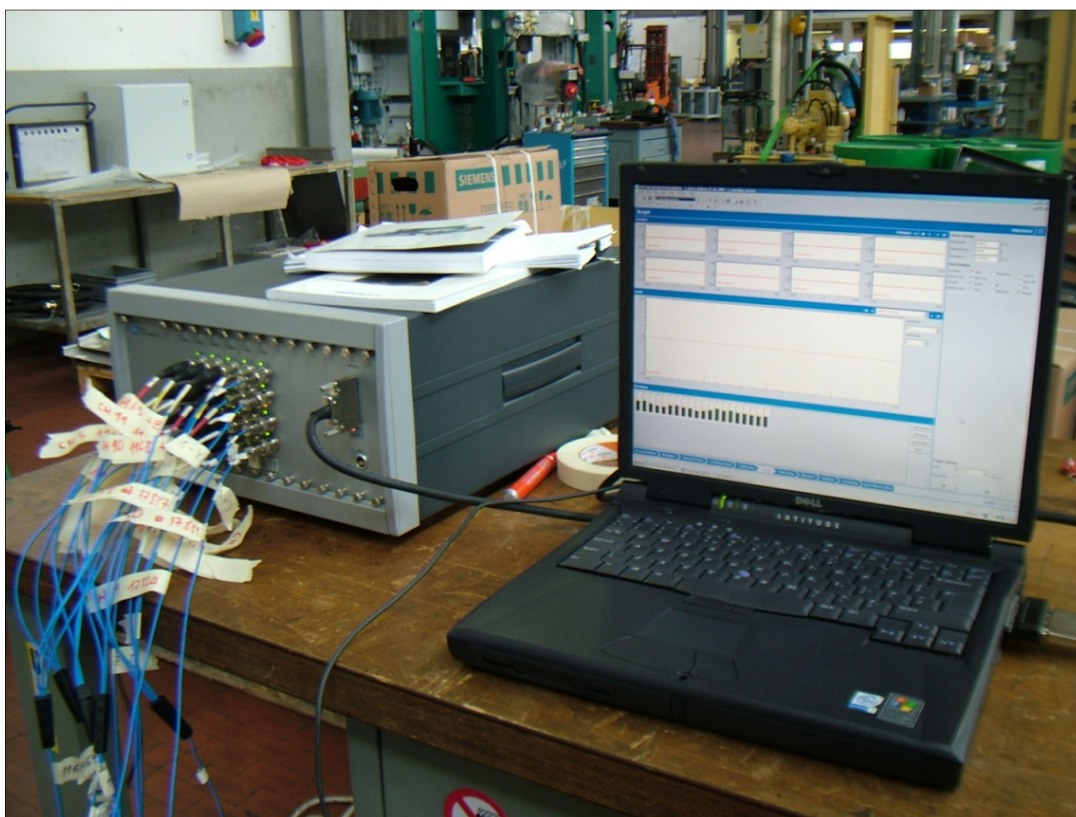


**Figura 4** Macchina fresatrice CNC 4 assi su cui sono state svolte le prove sperimentali.





**Figura 5** Posizione degli accelerometri (P1, P2, P3, P4, F4, P5, P6) sulla macchina fresatrice CNC 4 assi.



**Figura 6** Sistema di acquisizione: acquisitore LMS SCADAS III e laptop.

La macchina fresatrice è stata strumentata con accelerometri piezoelettrici PCB, 5 monoassiali (P1, P2, P3, P5, P6) e un triassiale (posizionato in P4 o in F4 in base al tipo di prova da eseguire), posizionati come in Figura 5. Sotto la morsa che blocca il pezzo in lavorazione è stata posizionata una tavola dinamometrica, progettata e realizzata dal DIEM per questa specifica applicazione, composta da due basamenti rigidi tra i quali sono alloggiati 4 celle di carico piezoelettriche triassiali, opportunamente prevaricate e tarate.

I segnali provenienti da questi sensori vengono acquisiti simultaneamente tramite un acquisitore (convertitore A/D) LMS SCADAS III dotato di 20 canali di input (24 bit, frequenza di campionamento massima pari a 102 kHz) collegato ad un laptop Dell, entrambi rappresentati in Figura 6.

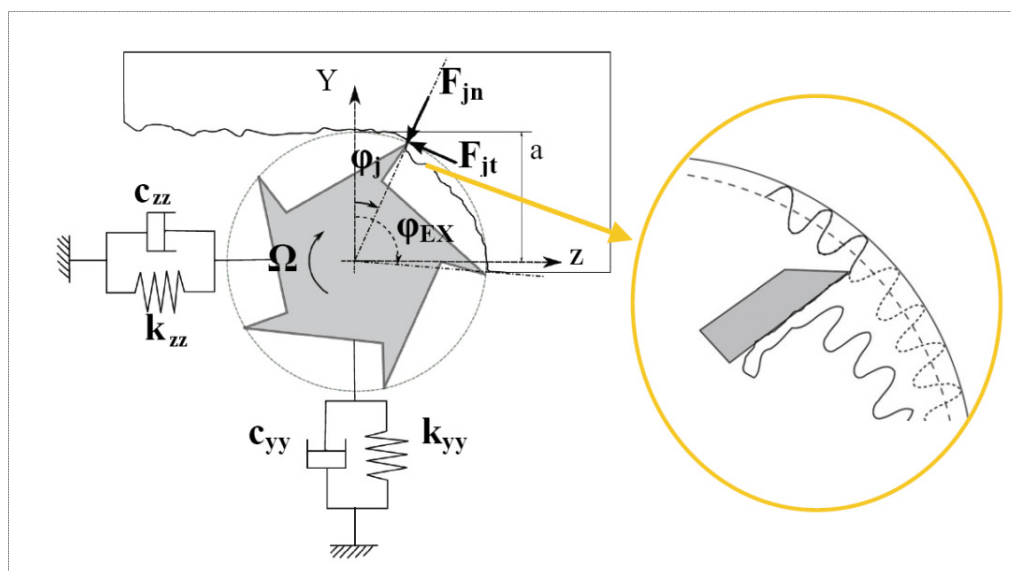
L'interfacciamento con l'acquisitore e l'elaborazione dei segnali sono state eseguite in parte tramite il software LMS TestLab e in parte con codici di calcolo implementati *ad hoc* in ambiente Matlab.

Tutte le misure sperimentali che verranno presentate in questo lavoro sono state eseguite utilizzando il set-up sperimentale qui descritto.

## 2.2) Modello a 2 gdl e modello delle azioni di taglio: equazioni differenziali con ritardo

Per poter studiare il fenomeno del chatter, uno dei modelli più utilizzati in letteratura è quello a 2 gdl (schematizzato in Figura 7). La cedevolezza della macchina fresatrice viene concentrata in due traslazioni  $v$  e  $w$  lungo gli assi  $y$  e  $z$  che definiscono un piano ortogonale all'asse dell'utensile in corrispondenza dell'estremo a contatto con il pezzo.

Le due traslazioni rappresentano le deformazioni che la macchina utensile subisce, a causa delle forze di taglio, nell'intorno della configurazione di taglio scelta. Tramite  $v$  e  $w$  non viene modellato il moto rigido del mandrino rispetto al pezzo, ma solo le piccole vibrazioni nell'intorno della configurazione imposta dal moto rigido.



**Figura 7** Schema del modello 2 gdl del processo di fresatura. Nell'ingrandimento è visibile la variazione di spessore di truciolo indotta dai segni lasciati dal tagliente sulla superficie del pezzo.

Sotto queste ipotesi, il comportamento dinamico della macchina fresatrice può essere considerato, con buona approssimazione, lineare e può essere modellato a parametri concentrati tramite due rigidezze  $k_{yy}$  e  $k_{zz}$ , due viscosità  $c_{yy}$  e  $c_{zz}$  e due masse modali  $m_{yy}$  e  $m_{zz}$  (una terna per ciascuna direzione).

L'ipotesi di 2 gdl è ammissibile solo se la macchina fresatrice, o l'utensile, presentano una cedevolezza concentrata tale da determinare una netta prevalenza di un modo di vibrare per ciascuna direzione sugli altri. Nonostante nelle macchine e negli utensili reali non si presenti praticamente mai una cedevolezza concentrata tale da soddisfare l'ipotesi del modello a 2 gdl, questo modello è molto utile per capire i meccanismi di generazione e studiare il fenomeno del chatter.

Esprimendo con  $F_y$  e  $F_z$  le risultanti, lungo gli assi  $y$  e  $z$ , delle azioni di taglio agenti su ciascun tagliente in presa, è possibile scrivere le equazioni del moto del sistema come:

$$\begin{cases} m_{yy}\ddot{v} + c_{yy}\dot{v} + k_{yy}v = F_y(t) \\ m_{zz}\ddot{w} + c_{zz}\dot{w} + k_{zz}w = F_z(t) \end{cases} \quad (1)$$

Sostituendo nelle equazioni (1) l'espressioni delle pulsazioni naturali  $\omega_{ny,z}$  e degli smorzamenti modali  $\zeta_{y,z}$  del sistema:

$$\omega_{ny} = \sqrt{\frac{k_{yy}}{m_{yy}}} \quad \omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_{zz}}{m_{zz}}} \quad \zeta_y = \frac{c_{yy}}{2\sqrt{m_{yy}k_{yy}}} \quad \zeta_z = \frac{c_{zz}}{2\sqrt{m_{zz}k_{zz}}} \quad (2)$$

si ottengono le equazioni del moto nella forma:

$$\begin{cases} \ddot{v} + 2\zeta_y\omega_{ny}\dot{v} + \omega_{ny}^2v = \frac{F_y(t)}{m_{yy}} \\ \ddot{w} + 2\zeta_z\omega_{nz}\dot{w} + \omega_{nz}^2w = \frac{F_z(t)}{m_{zz}} \end{cases} \quad (3)$$

Le equazioni (3) possono essere scritte in forma compatta come:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (4)$$

nella quale sono stati definiti il vettore spostamento, la matrice di viscosità, la matrice di rigidezza e il vettore delle forze di taglio:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\zeta_y\omega_{ny} & 0 \\ 0 & 2\zeta_z\omega_{nz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_{ny}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{nz}^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \frac{F_y(t)}{m_{yy}} \\ \frac{F_z(t)}{m_{zz}} \end{bmatrix} \quad (5)$$



Le risultanti delle azioni di taglio si ottengono sommando le proiezioni lungo le direzioni  $y$  e  $z$  delle forze tangenziali  $F_{jt}$  e normali  $F_{jn}$  agenti su ciascun tagliente in presa:

$$\begin{aligned} F_y(t) &= \sum_{j=1}^N g_j(t) [F_{jt}(t) \sin \varphi_j(t) - F_{jn}(t) \cos \varphi_j(t)] \\ F_z(t) &= \sum_{j=1}^N g_j(t) [-F_{jt}(t) \cos \varphi_j(t) - F_{jn}(t) \sin \varphi_j(t)] \end{aligned} \quad (6)$$

Nell'ipotesi di velocità angolare del mandrino  $\Omega$  costante, l'angolo  $\varphi_j$  che il  $j$ -esimo tagliente forma con l'asse  $y$  al tempo  $t$  è definito da:

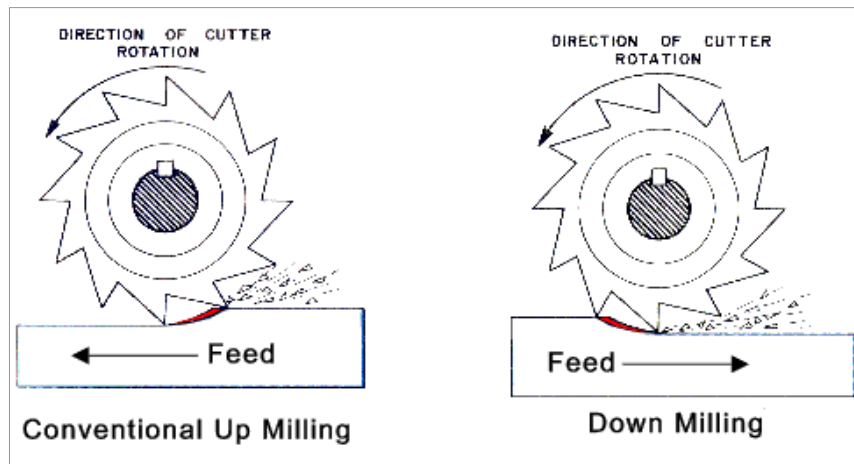
$$\Omega = \text{cost} \Rightarrow \varphi_j(t) = \Omega t + \frac{2\pi}{N} j \quad (7)$$

nella quale  $N$  rappresenta il numero totale dei denti della fresa. La funzione  $g_j$  indica se il  $j$ -esimo tagliente è in presa al tempo  $t$ , ovvero se si trova all'interno della zona di lavoro:

$$g_j(t) = \begin{cases} 1 & : \varphi_{ST} < \varphi_j(t) < \varphi_{EX} \\ 0 & : \text{altrimenti} \end{cases} \quad (8)$$

Gli angoli di ingresso  $\varphi_{ST}$  e di uscita  $\varphi_{EX}$  del tagliente dalla zona di lavoro sono esprimibili in funzione dell'immersione radiale dell'utensile  $a$  e del diametro dell'utensile  $D$ . Le espressioni dei due angoli risultano diverse in base al tipo di lavorazione: fresatura in discordanza (up-milling) e fresatura in concordanza (down-milling) rappresentate in Figura 8. Nel caso di taglio in discordanza (up-milling) tali angoli risultano:

$$\varphi_{ST} = 0 \quad \varphi_{EX} = \arccos(1 - 2\frac{a}{D}) \quad (9)$$



**Figura 8** A sinistra taglio in discordanza (up-milling) e taglio in concordanza (down-milling).

Nel caso di taglio in concordanza (down-milling) risultano invece:

$$\varphi_{ST} = \arccos(2\frac{a}{D} - 1) \quad \varphi_{EX} = \pi \quad (10)$$

Le componenti tangenziali  $F_{jt}$  e normali  $F_{jn}$  della forza di taglio agente su ciascun tagliente in presa sono esprimibili in funzione dei coefficienti di pressione specifica tangenziale  $K_t$  e normale  $K_n$  e dell'area di contatto tra tagliente e materiale asportato, a sua volta espressa come prodotto tra profondità assiale di taglio  $\delta$  e spessore di truciolo  $h_j$ :

$$F_{jt}(t) = K_t \delta h_j(t) \quad , \quad F_{jn}(t) = K_n \delta h_j(t) \quad (11)$$

Le pressioni specifiche di taglio sono coefficienti che dipendono principalmente dalla geometria del tagliente (ad es. dagli angoli di spoglio) e dal tipo di materiale lavorato (sono più bassi per l'alluminio che per l'acciaio) e in piccola parte dall'avanzamento (feed)  $f$  della fresa. È possibile reperire questi coefficienti nei cataloghi dei costruttori di utensili e inserti oppure è possibile stimarli sperimentalmente o analiticamente conoscendo la geometria del tagliente come dimostrato in [28].

Lo spessore di truciolo asportato da ciascun dente al tempo  $t$  è composto da una componente stazionaria, proporzionale all'avanzamento, e da una non stazionaria che dipende dalla vibrazione relativa tra pezzo e utensile al tempo  $t$  e al tempo  $t-\tau$ , ovvero al suo precedente passaggio:

$$\tilde{h}_j(t) = f \sin \varphi_j(t) + [w(t) - w(t - \tau)] \sin \varphi_j(t) + [v(t) - v(t - \tau)] \cos \varphi_j(t) \quad (12)$$

Se la lavorazione è stabile la periodicità delle vibrazione è pari a  $\tau$  e, a regime, nell'espressione dello spessore di truciolo (12) si elidono i termini indotti dalla vibrazione e rimane solo il termine stazionario:

$$\tilde{h}_j(t) = f \sin \varphi_j(t) \quad (13)$$

Sostituendo la (13) nelle (11), le funzioni (6) delle forze di taglio stazionarie diventano:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_y(t) &= \delta f \sum_{j=1}^N g_j(t) \sin \varphi_j(t) [K_t \sin \varphi_j(t) - K_n \cos \varphi_j(t)] \\ \tilde{F}_z(t) &= \delta f \sum_{j=1}^N g_j(t) \sin \varphi_j(t) [-K_t \cos \varphi_j(t) - K_n \sin \varphi_j(t)] \end{aligned} \quad (14)$$

Alcuni andamenti temporali delle funzioni (14) sono rappresentati in Figura 9 al variare dell'immersione radiale, espressa dal rapporto  $a/D$ , per lavorazioni down-milling e up-milling. Per immersione radiale massima 100% (lavorazione a tasca), le componenti di forza di taglio sono costanti; man mano che l'immersione radiale diminuisce le componenti diventano periodiche, il tempo in cui ciascun tagliente è in presa diminuisce e il taglio diventa interrotto.



**Figura 9** Andamenti temporali delle componenti stazionarie di forza di taglio  $F_z$  e  $F_y$ , ottenuti dalle espressioni (14), al variare dell'immersione radiale  $a/D$  per una lavorazione a  $\Omega=3500 \text{ rpm}$ ,  $f=0.5 \text{ mm/giro}$  e  $\delta=3 \text{ mm}$ . Nella colonna a sinistra le lavorazioni in down-milling, nella colonna a destra quelle in up-milling.

Analizzando gli spettri di tali componenti di forza, rappresentati in Figura 10, si osserva che i picchi di ampiezza compaiono solo in corrispondenza delle armoniche della frequenza di passaggio del dente  $f_{th}$ , multipla della frequenza di rotazione dell'utensile  $f_{om}$ :

$$f_{th} = \frac{2\pi}{\tau} = N \cdot 2\pi \cdot \Omega = N f_{om} \quad (15)$$

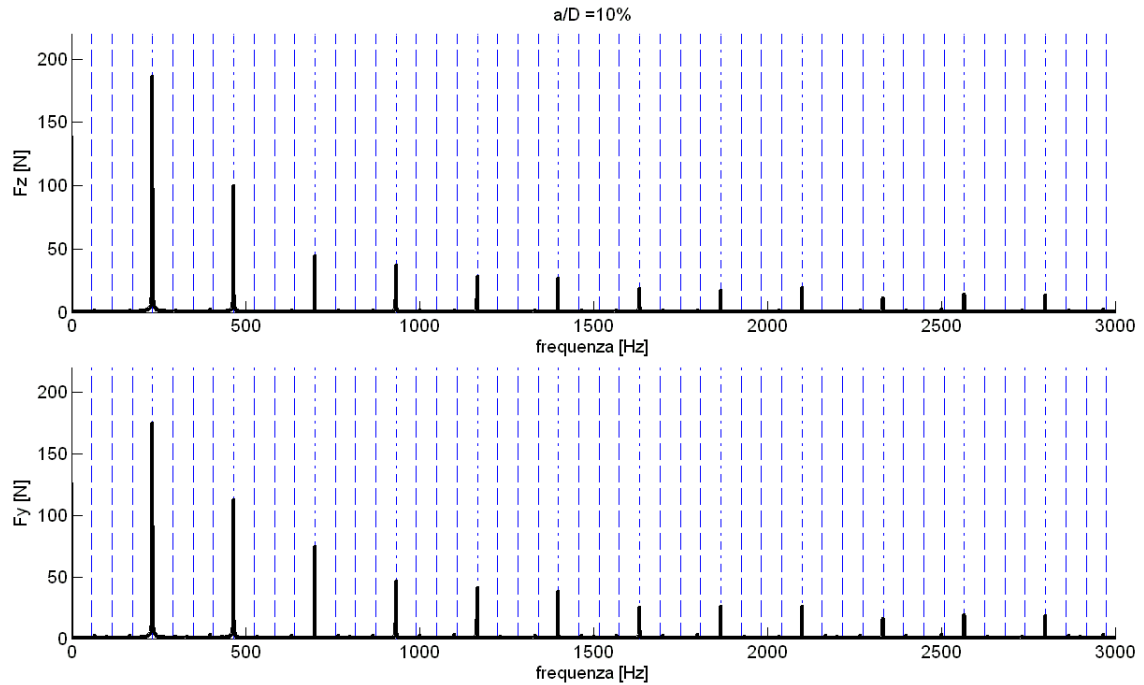
La causa dell'insorgere della vibrazione di chatter è la componente non stazionaria ed è l'unica che verrà presa in considerazione d'ora in avanti per studiare la stabilità del sistema:

$$h_j(t) = [w(t) - w(t - \tau)] \sin \varphi_j(t) + [v(t) - v(t - \tau)] \cos \varphi_j(t) \quad (16)$$

Sempre nell'ipotesi di velocità angolare del mandrino  $\Omega$  costante, il cosiddetto ritardo  $\tau$  rappresenta il tempo necessario ad un tagliente a tornare nella stessa posizione rispetto al pezzo ed è esprimibile come:

$$\Omega = \text{cost} \Rightarrow \tau = \frac{1}{N\Omega} \quad (17)$$

I termini in ritardo presenti nell'equazione (16) rappresentano le variazioni di spessore di truciolo indotte dalle ondulazioni sulla superficie del pezzo causate dalle vibrazione relativa tra pezzo e taglienti (Figura 7).



**Figura 10** Spettri delle componenti stazionarie di forza di taglio  $F_z$  e  $F_y$ , ottenuti dalle espressioni (14), per una lavorazione a  $\Omega=3500 \text{ rpm}$ ,  $f=0.5 \text{ mm/giro}$ ,  $\delta=3 \text{ mm}$  e  $a/D=10\%$ . Le linee blu tratto-punto sono le armoniche della frequenza del passaggio del dente ( $f_{th}$ ) e le linee blu tratteggiate sono le armoniche della frequenza di rotazione dell'utensile ( $f_{om}$ ).

Questo effetto viene comunemente chiamato effetto rigenerativo poiché induce una vibrazione che si autoalimenta passaggio dopo passaggio: più ampia è la vibrazione, più profondi risultano i solchi sulla superficie e maggiori risultano le variazioni di spessore di truciolo e di conseguenza le variazioni di forza di taglio che, a loro volta, aumentano l'ampiezza delle vibrazioni. Sostituendo le espressioni (11) nelle equazioni (6) si ottiene la seguente espressione delle forze di taglio:

$$\begin{aligned} F_y(t) &= \delta \sum_{j=1}^N g_j(t) h_j(t) [K_t \sin \varphi_j(t) - K_n \cos \varphi_j(t)] \\ F_z(t) &= \delta \sum_{j=1}^N g_j(t) h_j(t) [-K_t \cos \varphi_j(t) - K_n \sin \varphi_j(t)] \end{aligned} \quad (18)$$

Sostituendo l'espressione dello spessore di truciolo (16) nelle equazioni (18) si ottiene, dopo alcuni raccoglimenti, l'espressione compatta delle forze di taglio:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{H}(t) [\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \tau)] \quad (19)$$

nella quale il vettore di spostamento al tempo  $t - \tau$  è espresso da:

$$\mathbf{u}(t - \tau) = \begin{bmatrix} v(t - \tau) \\ w(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (20)$$

e la matrice  $\mathbf{H}$  è tempo variante periodica, con periodicità pari al ritardo, nella forma:

$$\mathbf{H}(t) = -\delta \begin{bmatrix} \frac{h_{yy}(t)}{m_{yy}} & \frac{h_{yz}(t)}{m_{yy}} \\ \frac{h_{zy}(t)}{m_{zz}} & \frac{h_{zz}(t)}{m_{zz}} \end{bmatrix} = \mathbf{H}(t + \tau) \quad (21)$$

I termini periodici della matrice  $\mathbf{H}$ , derivanti dal raccoglimento dell'equazione (19) sono:

$$h_{yy}(t) = \sum_{j=1}^N g_j(t) \left[ \cos \varphi_j(t) (K_t \sin \varphi_j(t) - K_n \cos \varphi_j(t)) \right] \quad (22)$$

$$h_{yz}(t) = \sum_{j=1}^N g_j(t) \left[ \sin \varphi_j(t) (K_t \sin \varphi_j(t) - K_n \cos \varphi_j(t)) \right] \quad (23)$$

$$h_{zy}(t) = \sum_{j=1}^N g_j(t) \left[ -\cos \varphi_j(t) (K_t \cos \varphi_j(t) + K_n \sin \varphi_j(t)) \right] \quad (24)$$

$$h_{zz}(t) = \sum_{j=1}^N g_j(t) \left[ -\sin \varphi_j(t) (K_t \cos \varphi_j(t) + K_n \sin \varphi_j(t)) \right] \quad (25)$$

Sostituendo l'espressione compatta delle forze di taglio (19) nell'equazione del moto (4) si ottiene l'equazione:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{H}(t)[\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \tau)] \quad (26)$$

nella quale è possibile riportare uno dei termini della forzante al primo membro, ottenendo l'equazione:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K} + \mathbf{H}(t)]\mathbf{u}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{u}(t - \tau) \quad (27)$$

Tramite un opportuno cambio di coordinate:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t - \tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t - \tau) \\ \dot{\mathbf{u}}(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (28)$$

e raccogliendo le matrici:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{K} - \mathbf{H}(t) & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{H}(t) & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

è possibile ridurre al primo l'ordine dell'equazione (27) che diventa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t - \tau) \quad (30)$$

Questa equazione rappresenta la dinamica del processo di fresatura per un modello di macchina utensile a 2 gdl: è un'equazione differenziale lineare autonoma (ovvero ad eccitazione parametrica) a coefficienti periodici (di periodicità  $\tau$ ) in cui è presente un termine in ritardo (PDDE). In alcune configurazioni dei parametri di taglio del sistema questa equazione può risultare instabile, ovvero può generare una soluzione la cui ampiezza cresce indefinitamente nel tempo. Non è nota ad oggi una soluzione in forma chiusa per questa classe di equazioni, quindi le alternative per poter studiare il comportamento di questo sistema sono essenzialmente due: l'integrazione numerica o l'analisi di stabilità ottenuta tramite una soluzione approssimata.

### 2.3) Metodo della semi discretizzazione

Per l'analisi di stabilità dei sistemi dinamici lineari a coefficienti costanti sono disponibili i metodi classici di studio degli autovalori, basati sui teoremi sulla stabilità di Lyapunov.

Il metodo della semi discretizzazione (SD), formulato di recente da Insperger e Stépán [34], [35] e [60], è un metodo numerico che consente di analizzare la stabilità, grazie ad una approssimazione della soluzione, delle equazioni differenziali con ritardo a coefficienti periodici del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t - \tau) \quad (31)$$

con:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + \tau) \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t + \tau)$$

Questo metodo è basato sulla teoria di Floquet [21] secondo la quale la soluzione delle equazioni del tipo (31) è esprimibile come:

$$\mathbf{x}(t) = \mu(t) \chi(t) + \bar{\mu}(t) \bar{\chi}(t) \quad (32)$$

nella quale le funzioni  $\chi$  sono complesse coniugate e periodiche di forma non nota:

$$\chi(t) = \chi(t + \tau) \quad \bar{\chi}(t) = \bar{\chi}(t + \tau) \quad (33)$$

e i  $\mu$  sono due funzioni esponenziali complesse coniugate e rappresentano i moltiplicatori caratteristici del sistema:

$$\mu(t) = e^{\lambda t} \quad \bar{\mu}(t) = e^{\bar{\lambda} t} \quad (34)$$

I moltiplicatori caratteristici del sistema sono gli autovalori della matrice di transizione  $\Phi$  del sistema definita come:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_{0t} \mathbf{x}(0) \quad (35)$$

Gli autovalori della matrice di transizione sul periodo  $\tau$  definita come:

$$\mathbf{x}(\tau) = \Phi_{0\tau} \mathbf{x}(0) \quad (36)$$

sono i moltiplicatori caratteristici sul periodo:

$$\mu = e^{\lambda \tau} \quad \bar{\mu} = e^{\bar{\lambda} \tau} \quad (37)$$

i quali contengono le informazioni sulla stabilità del sistema. Il sistema associato all'equazione (31) si definisce asintoticamente stabile se, e solo se, il modulo di tutti i moltiplicatori caratteristici sul periodo è

minore di 1, ovvero se tutti i relativi esponenti caratteristici  $\lambda$  hanno parte reale negativa. Questo equivale a dire che se almeno un moltiplicatore sul periodo ha modulo maggiore di 1, il sistema è instabile. Il sistema è in condizione limite tra stabilità e instabilità se almeno un moltiplicatore sul periodo soddisfa la relazione:

$$|\mu(t)| = 1 \quad (38)$$

e in questo caso si definisce moltiplicatore caratteristico critico. Si possono verificare tre diversi casi con cui si manifesta un moltiplicatore caratteristico critico associati ciascuno ad una tipologia di biforcazione del sistema:

1.  $|\mu(t)| = 1$   $|\overline{\mu}(t)| = 1$  due moltiplicatori complessi coniugati con modulo unitario, questo caso è topologicamente equivalente ad una biforcazione di Hopf dei sistemi autonomi ed è chiamata biforcazione secondaria di Hopf o biforcazione di Naimark-Sacker. Il moto del sistema in questo caso risulterà quasi-periodico.
2.  $\mu(t) = -1$  due moltiplicatori reali e coincidenti, in questo caso non esiste una biforcazione topologicamente equivalente dei sistemi autonomi. Questa biforcazione viene chiamata di tipo flip (o period doubling) ed è associata ad un moto periodico con periodo pari a  $2\tau$ .
3.  $\mu(t) = 1$  due moltiplicatori reali e coincidenti questo caso è topologicamente equivalente ad una biforcazione saddle-node (nodo a sella) dei sistemi autonomi. È stato dimostrato in [10] che questo caso non si può verificare per le equazioni di tipo (31).

Per un dato  $|\mu| = 1$ , il relativo esponente caratteristico  $\lambda$  è puramente immaginario:

$$\lambda = i\omega_c \quad (39)$$

dove  $\omega_c$  è la pulsazione di chatter associata al moto instabile del sistema, ed è definita come:

$$\omega_c = \frac{\ln \mu}{\tau} \quad (40)$$

Dato che la funzione esponenziale complesso è periodica, la funzione logaritmo non è univoca nel piano dei numeri complessi, ciò comporta la possibilità dell'insorgenza di frequenze multiple di chatter. Per calcolare le frequenze di chatter associate alle biforcazioni del caso 1 e 2 è necessario espandere in serie di Fourier la soluzione (32) imponendo una condizione critica  $\mu(t) = e^{i\omega_c t}$ :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \mathbf{C}_n e^{i(\omega_c + \frac{2\pi n}{\tau})t} + \overline{\mathbf{C}}_n e^{i(-\omega_c + \frac{2\pi n}{\tau})t} \right) \quad (41)$$



nella quale  $C_n$  sono i coefficienti complessi dell'espansione delle funzioni  $\chi$ . Dall'espansione (41) è possibile ricavare le frequenze di chatter per i due casi critici individuati:

1.  $|\mu(t)|=1$   $|\bar{\mu}(t)|=1$  due moltiplicatori complessi coniugati, biforcazione di Hopf

$$\omega_H = \pm \omega_c + n \frac{2\pi}{\tau} \quad n=0,1,2,\dots \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad \omega_c = \frac{\ln \mu}{\tau} \quad (42)$$

2.  $\mu(t)=-1$  due moltiplicatori reali e coincidenti, biforcazione period doubling

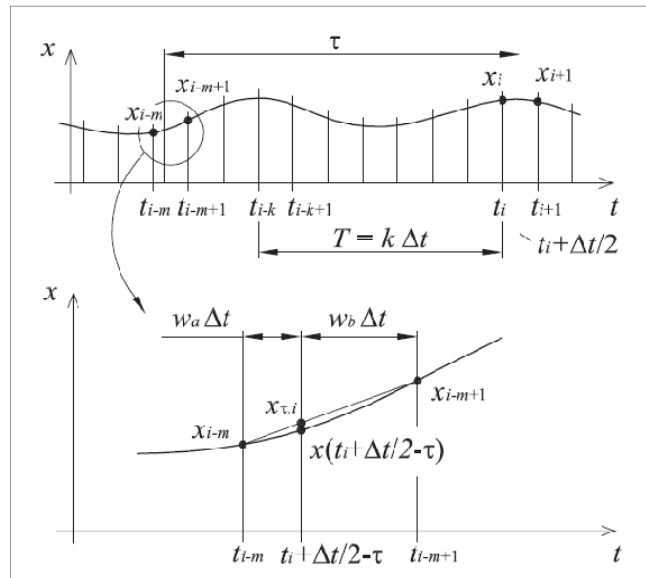
$$\omega_{PD} = \frac{\pi}{\tau} + n \frac{2\pi}{\tau} \quad n=0,1,2,\dots \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad \omega_c = \frac{\ln(-1)}{\tau} = \frac{\pi}{\tau} \quad (43)$$

Questa trattazione dimostra che, per i processi di fresatura, esistono due tipologie di moto associato alla vibrazione di chatter riconducibili topologicamente a due biforcazioni note per i sistemi autonomi.

La vibrazione di chatter associata a ciascuna delle due biforcazioni presenta caratteristiche spettrali diverse, le cui frequenze sono date dalle relazioni (42) e (43). Le proprietà di stabilità e le caratteristiche spettrali del processo di fresatura sono completamente individuate dai moltiplicatori caratteristici del sistema sul periodo (in questo caso coincidente con il ritardo), tali moltiplicatori si ottengono come autovalori della matrice di transizione su un periodo. Il metodo SD consente proprio di ottenere una stima della matrice di transizione del sistema sul periodo  $\Phi_{0\tau}$  definita dalla relazione (36).

Per ottenere questa stima si discretizza il periodo in  $m$  intervalli di tempo  $[t_i, t_{i+1}]$  di durata  $\Delta t$  tali che:

$$\tau = m\Delta t \quad (44)$$



**Figura 11** Rappresentazione grafica della discretizzazione temporale del metodo SD. Figura tratta da [35].

All'interno di ciascun intervallo si ricava il valor medio delle matrici **A** e **B** tramite l'integrale:

$$\mathbf{A}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{A}(t) dt \quad \mathbf{B}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{B}(t) dt \quad (45)$$

Introducendo le notazioni:

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(t_i - \tau) = \mathbf{x}_{\tau,i} \quad (46)$$

l'equazione (xx) può essere espressa come:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{x}_{\tau,i} \quad (47)$$

nella quale è stata introdotta la seguente approssimazione del termine in ritardo:

$$\mathbf{x}(t - \tau) \approx \mathbf{x}\left(t_i + \frac{\Delta t}{2} - \tau\right) \approx w_b \mathbf{x}_{i-m} + w_a \mathbf{x}_{i-m+1} = \mathbf{x}_{\tau,i} \quad \text{con} \quad w_a = w_b = \frac{1}{2} \quad (48)$$

Data la condizione iniziale:

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i \quad (49)$$

la soluzione dell'equazione (47), valida nell'intervallo di tempo infinitesimo  $[t_i, t_{i+1}]$ , risulta:

$$\mathbf{x}(t) = \left( \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{x}_{\tau,i} \right) e^{\mathbf{A}_i(t-t_i)} - \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{x}_{\tau,i} \quad (50)$$

Sostituendo nell'equazione (50):

$$t = t_{i+1} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}_{i+1} \quad (51)$$

e utilizzando l'equazione (49) si ottiene la soluzione discreta:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i + w_a \mathbf{R}_i \mathbf{x}_{i-m+1} + w_b \mathbf{R}_i \mathbf{x}_{i-m} \quad (52)$$

dove:

$$\mathbf{P}_i = e^{\mathbf{A}_i \Delta t} \quad (53)$$

$$\mathbf{R}_i = \left( e^{\mathbf{A}_i(t-t_i)} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{B}_i \quad (54)$$

Utilizzando l'equazione (52) si può definire una mappa discreta delle soluzioni di ciascun intervallo infinitesimo di tempo:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{C}_i \mathbf{y}_i \quad (55)$$

nella quale  $\mathbf{y}_i$  è un vettore di dimensioni  $n(m-1)$  nella forma:

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{i-1} \\ \dots \\ \mathbf{x}_{i-m} \end{bmatrix} \quad (56)$$

e la matrice dei coefficienti risulta:

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & w_a \mathbf{R}_i & w_b \mathbf{R}_i \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (57)$$

La matrice di transizione che mette in relazione gli stati  $\mathbf{y}_0$  ed  $\mathbf{y}_m$ :

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{\Phi}_{0m} \mathbf{y}_0 \quad (58)$$

è una stima della matrice di transizione del sistema sul periodo  $\tau = m \Delta t$  ed è composta dal prodotto:

$$\mathbf{\Phi}_{0m} = \mathbf{C}_{m-1} \mathbf{C}_{m-2} \dots \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0 \simeq \mathbf{\Phi}_{0\tau} \quad (59)$$

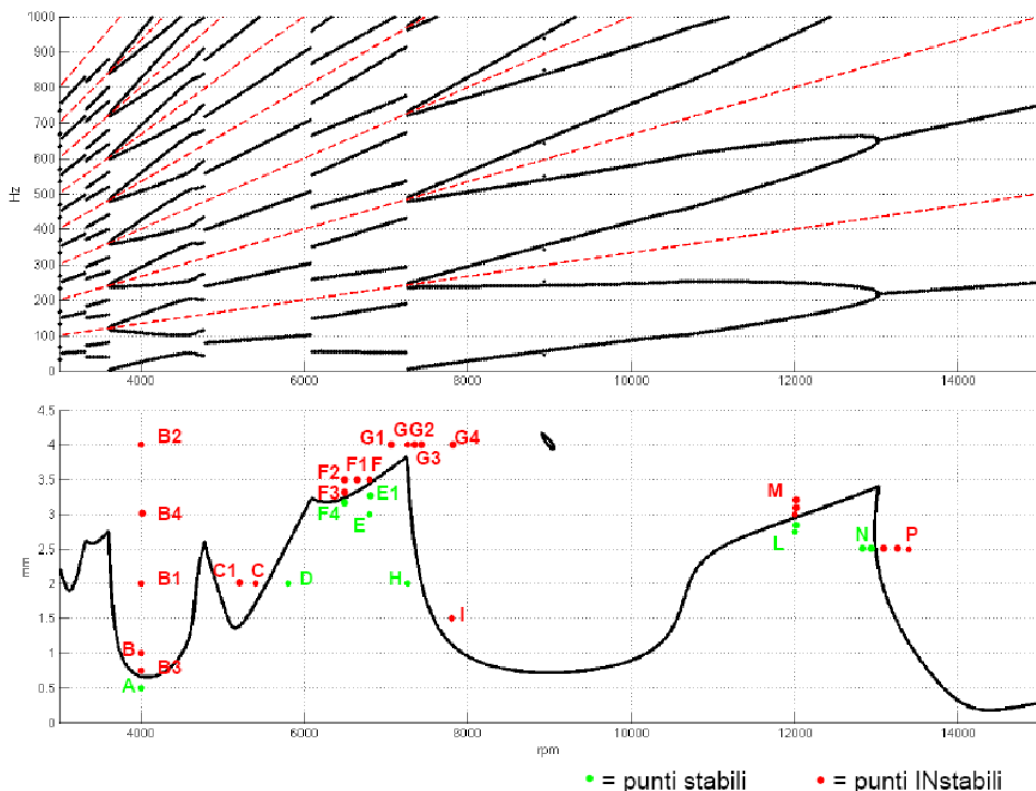
Dagli autovalori di (59) si ottengono i moltiplicatori caratteristici del sistema con cui è possibile studiare la stabilità del processo di fresatura e le frequenze caratteristiche di chatter.

## 2.4) Validazione numerica del metodo della semi discretizzazione

Prima dell'applicazione ad un caso reale, i diagrammi di stabilità, ottenuti applicando il metodo della semi discretizzazione ad un modello 2 gdl, sono stati confrontati con i risultati ottenuti dall'integrazione numerica dell'equazione del moto (30). Dopo aver scelto un set di parametri, trovato in letteratura, per il modello 2 gdl, sono stati valutati i diagrammi di stabilità e frequenze di chatter per diversi valori di immersione radiale, in Figura 12 sono mostrati i diagrammi relativi ad un' immersione radiale  $a/D=15\%$ .

Sul diagramma di stabilità, sono stati selezionati 22 punti di lavoro, riportati in Tabella 1, per i quali l'equazione del moto del sistema, nella forma dell'equazione (30), è stata integrata numericamente utilizzando una procedura implementata in ambiente Matlab. Tale procedura, chiamata *dde23*, è dedicata all'integrazione di equazioni differenziali non lineari con termini in ritardo ed è basata su procedure standard di integrazione numerica a passo variabile del secondo e terzo ordine. I dettagli sull'algoritmo su cui si basa la procedura *dde23* sono riportati in [58].

Analizzando le storie temporali delle variabili di spostamento della fresa  $\mathbf{u}(t)$ , relative ai punti di lavoro selezionati, sono stati assegnati dei giudizi binari sulla stabilità delle lavorazioni. Ad ampiezze della vibrazione  $\mathbf{u}(t)$  crescenti nel tempo è stato associato un giudizio instabile (punto rosso) legato all'insorgenza del chatter, ad ampiezze stazionarie o decrescenti è stato associato un giudizio stabile (punto verde).



**Figura 12** In alto: diagramma delle frequenze di chatter (punti neri) e delle frequenze di passaggio del dente (linee tratteggiate rosse). In basso: diagramma di stabilità per il modello a 2 gdl, i punti verdi sono le condizioni di lavoro numericamente stabili e i punti rossi quelle numericamente instabili. Immersione radiale  $a/D=15\%$ .

**Tabella 1** Punti di lavoro selezionati per l'integrazione numerica.

<b>Punti</b>	<b>Vel. Ang. Mandrino [rpm]</b>	<b>Profondità di passata [mm]</b>	<b>Punti</b>	<b>Vel. Ang. Mandrino [rpm]</b>	<b>Profondità di passata [mm]</b>
<b>A</b>	4000	0.5	<b>G1</b>	7200	4
<b>B3</b>	4000	0.75	<b>G</b>	7260	4
<b>B</b>	4000	1	<b>G2</b>	7300	4
<b>B1</b>	4000	2	<b>G3</b>	7400	4
<b>B4</b>	4000	3	<b>G4</b>	7800	4
<b>B2</b>	4000	4	<b>H</b>	7260	2
<b>D</b>	5800	2	<b>I</b>	7800	1.5
<b>C</b>	5400	2	<b>L</b>	12000	2.75
<b>C1</b>	5300	2	<b>M</b>	12000	3.25
<b>E</b>	6800	3	<b>N</b>	12800	2.5
<b>E1</b>	6800	3.25	<b>P</b>	13200	2.5

Come si può osservare dalla Figura 12, per tutti i punti selezionati è stata verificata la concordanza tra la predizione di stabilità ottenuta tramite il metodo SD e la soluzione numerica.

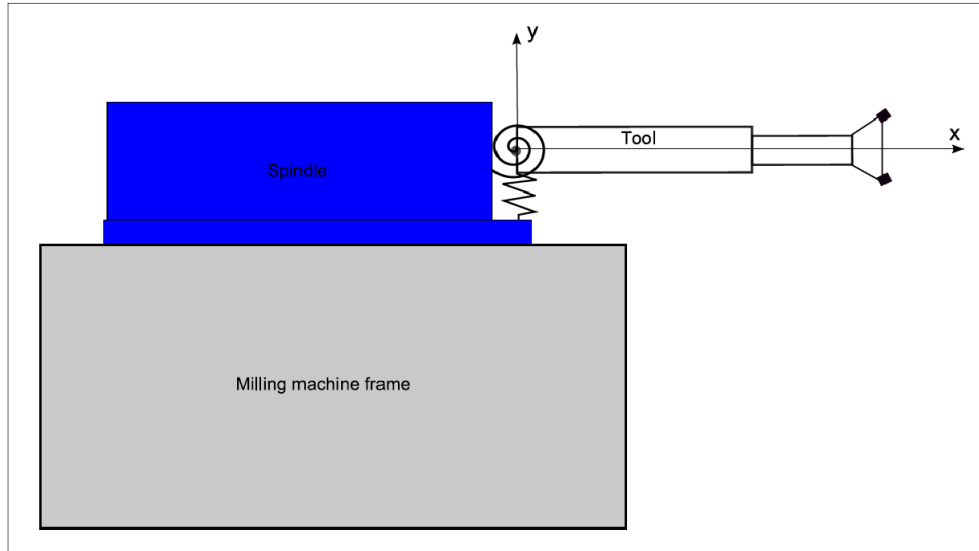
Sono stati anche calcolati, tramite trasformata di Fourier discreta, gli spettri degli andamenti temporali ricavati numericamente tramite i quali sono state verificate anche le frequenze di chatter predette dal diagramma delle frequenze.

È stato quindi verificato che il metodo SD è un metodo numericamente più efficiente, ed ugualmente affidabile, rispetto all'integrazione numerica puntuale, per mappare la stabilità e le caratteristiche spettrali delle soluzioni delle equazioni differenziali con ritardo a coefficienti periodici.

## 2.5) Modello analitico-sperimentale a $n$ gdl

Dai lavori presenti in letteratura (ad esempio [44], [50] e [55]) e dalle prove sperimentali effettuate sulla macchina fresatrice presa in esame in questo lavoro, emerge che l'influenza dei modi propri di vibrare del telaio sulla risposta dinamica in della punta dell'utensile non è affatto trascurabile. Viene proposto quindi un modello di macchina utensile ad  $n$  gdl realizzato tramite l'accoppiamento elastico di un modello modale sperimentale di telaio e mandrino con un modello analitico continuo dell'utensile basato sulle autofunzioni della trave libera-libera. Una rappresentazione schematica di tale modello è riportata in Figura 13.

Per identificare i parametri del modello, associati ad un dato modello di macchina fresatrice reale, è sufficiente: un'unica campagna di prove sperimentali sul telaio, completo di mandrino, e la conoscenza della geometria e delle caratteristiche del materiale (densità e modulo elastico) dei diversi utensili utilizzati nelle lavorazioni. Questo approccio consente limitare i tempi della fase di identificazione, mantenendo un livello di precisione sufficiente a studiare la stabilità della macchina fresatrice impegnata in varie tipologie di lavorazioni eseguite con diversi utensili.



**Figura 13** Schema del modello analitico-sperimentale ad  $n$  gdl.

Le equazioni del moto del sistema vengono ricavate tramite un approccio energetico. Viene espressa l'energia potenziale totale del solo utensile, considerato come libero, come somma dell'energia potenziale elastica  $U_I$  e dell'energia potenziale delle azioni di inerzia  $W_I$ :

$$\Pi_{1,0} = U_I + W_I \quad (60)$$

Le autofunzioni dell'utensile sono state ricavate dall'equazione della trave piana a flessione di Eulero-Bernoulli (viene trascurato il contributo dell'inerzia alla rotazione della sezione):

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (61)$$

Seguendo la formulazione di Ritz, gli spostamenti della trave  $v(x)$ , lungo l'asse  $y$ , e  $w(x)$ , lungo l'asse  $z$ , possono essere approssimati come una combinazione lineare delle prime  $2m$  autofunzioni della trave libera-libera ( $2 \times 2$  rigide +  $2 \times (m-2)$  flessibili):

$$v(\zeta) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(\zeta) \cdot q_{1i} \quad , \quad \zeta = \frac{x}{L} \quad (62)$$

$$w(\zeta) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(\zeta) \cdot q_{2i} \quad , \quad \zeta = \frac{x}{L} \quad (63)$$

nelle quali  $\zeta$  rappresenta l'ascissa, normalizzata rispetto alla lunghezza totale dell'utensile  $L$ , assiale rispetto all'utensile,  $q_{1i}$  sono le componenti del vettore di coordinate modali dell'utensile, e  $\Phi_i$  sono le autofunzioni normalizzate:

$$\int_0^1 \Phi_i^2(\zeta) \cdot d\zeta = 1 \quad (64)$$

nella forma:

$$\Phi_1(\zeta) = 1. \quad \Phi_2(\zeta) = \sqrt{12} \cdot (\zeta - 0.5) \quad (65)$$

$$\Phi_i(\zeta) = \cosh(\zeta\tau_i) + \cos(\zeta\tau_i) - \frac{\cosh(\tau_i) - \cos(\tau_i)}{\sinh(\tau_i) - \sin(\tau_i)} \cdot (\sinh(\zeta\tau_i) + \sin(\zeta\tau_i)) \quad , \quad i > 2 \quad (66)$$

dove:

$$\begin{aligned} i = 1, 2: \quad \tau_{1,2} &= 0. \\ i > 2: \quad \cos(\tau_i) \cdot \cosh(\tau_i) &= 1.0. \end{aligned} \quad (67)$$

Le relazioni (62) e (63) possono essere riassunte in una forma compatta:

$$\mathbf{u}_1(\zeta, t) = \mathbf{\Phi}(\zeta) \mathbf{q}_1(t) \quad (68)$$

dove  $\mathbf{u}_1$  è il vettore degli spostamenti dell'utensile,  $\mathbf{q}_1$  è il vettore delle coordinate indipendenti dell'utensile:

$$\mathbf{u}_1(\zeta, t) = \begin{bmatrix} v(\zeta, t) \\ w(\zeta, t) \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{q}_1(t) = \begin{bmatrix} q_{1,1} \\ \dots \\ q_{1,2m} \end{bmatrix} \quad (69)$$

e  $\Phi$  è la matrice che raccoglie le autofunzioni ricavate dall'equazione (61):

$$\Phi(\zeta) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\zeta) & \dots & \Phi_m(\zeta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_1(\zeta) & \dots & \Phi_m(\zeta) \end{bmatrix} \quad (70)$$

Definendo come costanti  $E$  il modulo di elasticità e  $\rho$  la densità del materiale dell'utensile, e come funzioni dell'ascissa normalizzata l'area  $A$  e l'inerzia  $I$  della sezione dell'utensile, l'energia potenziale elastica dell'utensile viene espressa come:

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{L^3} \int_0^1 E I(\zeta) \mathbf{u}_1'^T(\zeta, t) \mathbf{u}_1''(\zeta, t) d\zeta \quad (71)$$

mentre l'energia potenziale delle azioni di inerzia risulta:

$$W_1 = \rho L \int_0^1 A(\zeta) \mathbf{u}_1^T(\zeta, t) \ddot{\mathbf{u}}_1(\zeta, t) d\zeta \quad (72)$$

Sostituendo nelle equazioni (71) e (72) le espressioni dello spostamento (68) si ottiene:

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{L^3} \mathbf{q}_1^T(t) \left( \int_0^1 E I(\zeta) \Phi^T(\zeta) \Phi''(\zeta) d\zeta \right) \mathbf{q}_1(t) \quad (73)$$

$$W_1 = \mathbf{q}_1^T(t) \left( \rho L \int_0^1 A(\zeta) \Phi^T(\zeta) \Phi(\zeta) d\zeta \right) \ddot{\mathbf{q}}_1(t) \quad (74)$$

Imponendo la stazionarietà dell'energia potenziale totale dell'utensile non vincolato, ottenuto dalla somma delle equazioni (73) e (74):

$$\nabla_{\mathbf{q}_1} \Pi_{1,0} = 0 \quad (75)$$

si ottiene l'equazione del moto in funzione delle coordinate generalizzate dell'utensile:

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_1 = \mathbf{0} \quad (76)$$

nella quale le matrici di massa  $\mathbf{M}_1$  e rigidezza  $\mathbf{K}_1$  sono espresse come:

$$\mathbf{M}_1 = \rho L \int_0^1 A(\zeta) \Phi^T(\zeta) \Phi(\zeta) d\zeta \quad (77)$$



$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{L^3} \int_0^L E I(\zeta) \boldsymbol{\Phi}^T(\zeta) \boldsymbol{\Phi}''(\zeta) d\zeta \quad (78)$$

L'autoproblema associato all'equazione (76) risulta:

$$(-\omega_{n1,i}^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1) \boldsymbol{\psi}_{1,i} = \mathbf{0} \quad (79)$$

dove  $\omega_{n1,i}$  è l' $i$ -esima pulsazione naturale e  $\boldsymbol{\psi}_{1,i}$  è l' $i$ -esimo autovettore della matrice degli autovettori dell'utensile:

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = [\boldsymbol{\psi}_{1,1}, \boldsymbol{\psi}_{1,2}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{1,2m}] \quad (80)$$

normalizzata rispetto alla matrice massa:

$$\boldsymbol{\Psi}_1^T \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Psi}_1 = \mathbf{I} \quad (81)$$

Applicando all'equazione (76) la trasformazione nelle coordinate modali dell'utensile  $\mathbf{z}_1$ :

$$\mathbf{q}_1 = \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{z}_1 \quad (82)$$

e premoltiplicando per la trasposta della matrice degli autovettori:

$$\boldsymbol{\Psi}_1^T \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Psi}_1 \ddot{\mathbf{z}}_1 + \boldsymbol{\Psi}_1^T \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \quad (83)$$

si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{z}}_1 + \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{n1}^2) \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \quad (84)$$

Viene aggiunto uno smorzamento viscoso modale di tipo reale del tipo:

$$\boldsymbol{\Psi}_1^T \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\Psi}_1 = \text{diag}(2 \zeta_1 \boldsymbol{\omega}_{n1}) \quad (85)$$

dove i coefficienti di smorzamento interno dell'utensile  $\zeta_1$  assumono valori compresi fra 0.01 e 3%. Si esprime quindi l'espressione del potenziale totale dell'utensile includendo il potenziale delle azioni dissipative interne e delle azioni esterne di taglio:

$$\Pi_1 = \mathbf{z}_1^T \ddot{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{z}_1^T \text{diag}(2 \zeta_1 \boldsymbol{\omega}_{n1}) \dot{\mathbf{z}}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^T \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{n1}^2) \mathbf{z}_1 + W_e \quad (86)$$

Le azioni di taglio sono applicate in corrispondenza della punta (TIP) dell'utensile ( $\zeta=1$ ), in corrispondenza della quale la matrice delle autofunzioni e il vettore degli spostamenti assumono il valore:

$$\mathbf{\Phi}_{TIP} = \mathbf{\Phi}_{(\zeta=1)} \quad (87)$$

$$\mathbf{u}_{1,TIP}(t) = \mathbf{\Phi}_{TIP} \mathbf{q}_1(t) = \mathbf{\Phi}_{TIP} \mathbf{\Psi}_1 \mathbf{z}_1(t) \quad (88)$$

L'energia potenziale delle forze esterne  $\mathbf{f}$  è espressa dall'equazione:

$$W_e = -\mathbf{u}_{1,TIP}^T(t) \mathbf{f}(t) = -\mathbf{z}_1^T(t) \mathbf{\Psi}_1^T \mathbf{\Phi}_{TIP}^T \mathbf{f}(t) \quad (89)$$

nella quale l'espressione di  $\mathbf{f}$  è analoga alla (19) del modello a 2 gdl:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} F_y(t) \\ F_z(t) \end{bmatrix} = -\mathbf{H}_1(t) [\mathbf{u}_{1,TIP}(t) - \mathbf{u}_{1,TIP}(t - \tau)] \quad (90)$$

Nella (90)  $\mathbf{H}_1$  è la matrice dei coefficienti di taglio, espressi nelle (22)-(25), che varia con periodicità  $\tau$ :

$$\mathbf{H}_1(t) = -\delta \begin{bmatrix} h_{yy}(t) & h_{yz}(t) \\ h_{zy}(t) & h_{zz}(t) \end{bmatrix} \quad (91)$$

Sostituendo l'equazione (89) nell'equazione (86) si ottiene l'espressione dell'energia potenziale totale dell'utensile:

$$\Pi_1 = \mathbf{z}_1^T \ddot{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{z}_1^T \text{diag}(2 \zeta_1 \omega_{n1}) \dot{\mathbf{z}}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^T \text{diag}(\omega_{n1}^2) \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_1^T(t) \mathbf{\Psi}_1^T \mathbf{\Phi}_{TIP}^T \mathbf{f}(t) \quad (92)$$

Eseguendo un'analisi modale sperimentale della macchina fresatrice, senza alcun utensile montato, è possibile ricavare il vettore  $\omega_{n2}$  delle pulsazioni naturali, il vettore degli smorzamenti modali  $\zeta_2$  e la matrice  $\mathbf{\Psi}_2$  degli autovettori del telaio-mandrino, normalizzati rispetto alla matrice massa.

Si può quindi esprimere l'espressione del potenziale totale del telaio-mandrino, analoga all'equazione (92), come somma dei potenziali elastici e delle azioni dissipative e dell'energia potenziale delle azioni di inerzia espressi in funzione delle coordinate modali del telaio-mandrino  $\mathbf{q}_2$ :

$$\Pi_2 = \mathbf{q}_2^T \ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{q}_2^T \text{diag}(2 \zeta_2 \omega_{n2}) \dot{\mathbf{q}}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{q}_2^T \text{diag}(\omega_{n2}^2) \mathbf{q}_2 \quad (93)$$

I due modelli, utensile e telaio-mandrino, vengono accoppiati tramite vincoli elastici alla traslazione e alla rotazione, applicati tra l'estremità dell'utensile corrispondente a  $\zeta=0$  e i gradi di libertà del modello modale

del telaio-mandrino posti sull'attacco del portautensile. Il potenziale dei vincoli elastici può essere espresso come:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi = & \frac{1}{2}\mathbf{q}_1^T(\Phi_V^T\mathbf{K}_T\Phi_V + \Phi_V^{*T}\mathbf{K}_R\Phi_V^*)\mathbf{q}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{q}_2^T(\Psi_2^T\mathbf{K}_T\Psi_2)\mathbf{q}_2 + \dots \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{q}_1^T(\Phi_V^T\mathbf{K}_T\Psi_2)\mathbf{q}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{q}_2^T(\Psi_2^T\mathbf{K}_T\Phi_V)\mathbf{q}_1\end{aligned}\quad (94)$$

dove  $\mathbf{K}_T$  e  $\mathbf{K}_R$  sono le matrici di rigidezza dei vincoli, rispettivamente alla traslazione e alla rotazione, e la matrice delle autofunzioni dell'utensile, calcolata in  $\zeta=0$ , viene indicata come:

$$\Phi_V = \Phi_{(\zeta=0)} \quad (95)$$

Sostituendo nell'equazione (94) l'espressione (82) si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi = & \frac{1}{2}\mathbf{z}_1^T\Psi_1^T(\Phi_V^T\mathbf{K}_T\Phi_V + \Phi_V^{*T}\mathbf{K}_R\Phi_V^*)\Psi_1\mathbf{z}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{q}_2^T(\Psi_2^T\mathbf{K}_T\Psi_2)\mathbf{q}_2 + \dots \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{z}_1^T\Psi_1^T(\Phi_V^T\mathbf{K}_T\Psi_2)\mathbf{q}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{q}_2^T(\Psi_2^T\mathbf{K}_T\Phi_V)\Psi_1\mathbf{z}_1\end{aligned}\quad (96)$$

Utilizzando le equazioni (92), (93) e (96) è possibile esprimere l'energia potenziale totale del modello di macchina fresatrice assemblato come:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Delta\Pi \quad (97)$$

L'equazione (97) risulta essere una funzione delle coordinate modali  $\mathbf{z}_1$ , relative all'utensile, e  $\mathbf{q}_2$ , relative al telaio-mandrino, che vengono raccolte nel vettore  $\mathbf{q}$  di coordinate modali del modello assemblato:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}(t-\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t-\tau) \\ \mathbf{q}_2(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (98)$$

Imponendo la stazionarietà del potenziale totale (97) rispetto alle coordinate modali  $\mathbf{q}$ :

$$\nabla_{\mathbf{q}}\Pi=0$$

si ottengono, dopo alcuni passaggi, le matrici massa  $\mathbf{M}$ , viscosità  $\mathbf{C}$  e rigidezza  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_{2m+n2} \quad (99)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \text{diag}(2\zeta_1\omega_{n1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(2\zeta_2\omega_{n2}) \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\omega_{n1}^2) + \Psi_1^T (\Phi_V^T \mathbf{K}_T \Phi_V + \Phi_V^T \mathbf{K}_R \Phi_V) \Psi_1 & -\Psi_1^T (\Phi_V^T \mathbf{K}_T \Psi_2) \\ -(\Psi_2^T \mathbf{K}_T \Phi_V) \Psi_1 & \text{diag}(\omega_{n2}^2) + \Psi_2^T \mathbf{K}_T \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (101)$$

e l'equazione del moto del modello totale di macchina fresatrice:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \Psi_1^T \Phi_{TIP}^T \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (102)$$

È possibile esprimere il vettore delle forze di taglio  $\mathbf{f}$  in funzioni delle coordinate modali dell'utensile:

$$\mathbf{f}(t) = -\mathbf{H}(t) [\mathbf{u}_{1,TIP}(t) - \mathbf{u}_{1,TIP}(t - \tau)] = -\mathbf{H}(t) \Phi_{TIP} \Psi_1 [\mathbf{z}_1(t) - \mathbf{z}_1(t - \tau)] \quad (103)$$

Sostituendo l'equazione (103) nella (102), si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Psi_1^T \Phi_{TIP}^T \mathbf{H}_1(t) \Phi_{TIP} \Psi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) - \mathbf{z}_1(t - \tau) \\ \mathbf{q}_2(t) - \mathbf{q}_2(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (104)$$

Portando a primo membro il termine delle azioni di taglio dipendenti da  $\mathbf{q}(t)$ , dalla (104) si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{H}_n(t))\mathbf{q}(t) = \mathbf{H}_n(t)\mathbf{q}(t - \tau) \quad (105)$$

dove:

$$\mathbf{H}_n(t) = \begin{bmatrix} \Psi_1^T \Phi_{TIP}^T \mathbf{H}_1(t) \Phi_{TIP} \Psi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (106)$$

Applicando all'equazione (105) la trasformazione delle coordinate nello spazio degli stati:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t - \tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t - \tau) \\ \dot{\mathbf{q}}(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (107)$$

e raccogliendo le matrici:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} - \mathbf{H}_n(t) & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_n(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (108)$$

si ottiene l'equazione differenziale con ritardo a coefficienti periodici del primo ordine associata al modello analitico-sperimentale della macchina fresatrice:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t - \tau) \quad (109)$$

analoga nella forma all'equazione (30) ricavata per il modello a 2 gdl a parametri concentrati, ma dove al posto delle coordinate geometriche compaiono le coordinate modali  $\mathbf{x}$ .

## CAPITOLO 3

### Identificazione e validazione sperimentale dei modelli del chatter in fresatura

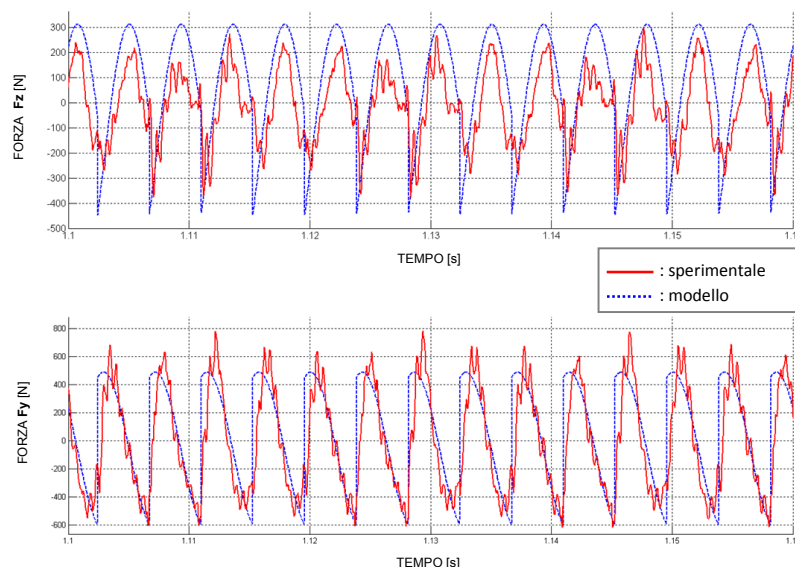
#### 3.1) Misura delle azioni di taglio

Per validare il modello delle azioni di taglio presentato nel paragrafo 2.2, sono state condotte numerose prove di lavorazioni, su pezzi in alluminio, variando i parametri di taglio in modo da ottenere condizioni il più possibile stabili. È stato utilizzato un utensile piuttosto corto, di lunghezza pari a circa 200 mm, con 4 taglienti ad inserto rimovibili.

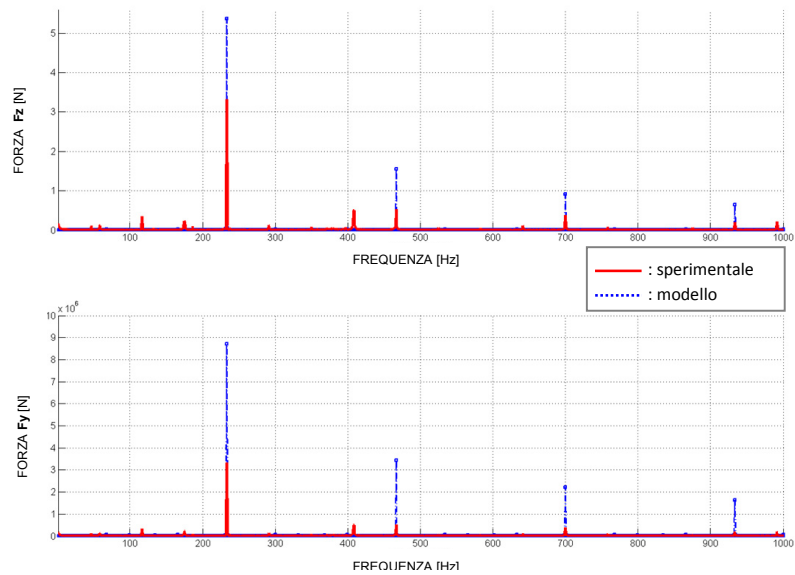
I 12 segnali provenienti dalle 4 celle di carico triassiali, che costituiscono la tavola dinamometrica visibile in Figura 4, registrati durante le prove, sono stati sommati, lungo le direzioni gli assi della terna di riferimento, per ottenere una stima delle componenti  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  della forza di taglio risultante sul pezzo.

Le componenti  $F_y$  e  $F_z$  ottenute sperimentalmente sono state confrontate con quelle ottenute dal modello di forza per regimi di taglio stazionario, rappresentato dalle equazioni (14), sia nel dominio del tempo (Figura 14), che nel dominio della frequenza (Figura 15).

I coefficienti di pressione specifica tangenziale  $K_t$  e normale  $K_n$  di taglio, presi dal catalogo del costruttore dei taglienti (SECO), sono stati in alcuni casi verificati, in altri modificati iterativamente per ottenere la minor differenza media rispetto ai segnali sperimentali. La dipendenza dei coefficienti da alcuni parametri di taglio (principalmente dall'avanzamento  $f$ ), rende necessaria questa fase di tuning. Nel catalogo, infatti, vengono riportati solo un valore di  $K_t$  e uno di  $K_n$  per ciascuna tipologia di tagliente; questi valori sono riferiti ad un singolo valore di avanzamento. In generale l'attinenza tra prove sperimentali e risultati del modello è risultata abbastanza soddisfacente.



**Figura 14** Andamento temporale delle componenti di forza di taglio lungo gli assi y e z durante una lavorazione stabile eseguita a  $\Omega=3500$  rpm,  $\delta=3$  mm e  $f=1$  mm/giro.



**Figura 15** Spettri delle componenti di forza di taglio lungo gli assi  $y$  e  $z$  durante una lavorazione stabile eseguita a  $\Omega=3500 \text{ rpm}$ ,  $\delta=3 \text{ mm}$  e  $f=1 \text{ mm/giro}$ .

Bisogna tuttavia osservare che la stima di forza ottenuta con la tavola dinamometrica va tratta con cautela poiché risente di un errore dovuto alle azioni inerziali agenti sulla piastra superiore della tavola. Questo errore aumenta con livelli di accelerazione a cui è soggetta la parte superiore della tavola dinamometrica. Sono stati anche notati negli spettri di forza di taglio misurata (Figura 15) dei picchi, in corrispondenza delle armoniche della frequenza di rotazione dell'utensile  $f_{om}$ , definita nell'espressione (15), non previsti dal modello (Figura 10) in cui compaiono picchi rilevanti solo in corrispondenza delle armoniche della frequenza di passaggio dei denti  $f_{th}$ . Questo fenomeno è causato dagli effetti dinamici indotti dagli squilibri presenti nel rotore (albero mandrino e utensile accoppiati) che non vengono tenuti in considerazione nel modello delle azioni di taglio. Nella campo industriale non si riesce, per motivi di tempi e costi, ad eseguire la procedura sperimentale di equilibratura del mandrino per ciascuno dei numerosi utensili utilizzati dai moderni centri di lavoro: questo comporta che, nella maggior parte delle lavorazioni, sono presenti gli effetti dinamici indotti dagli squilibri del rotore.

Verrà indagato nei successivi paragrafi che cosa comporta, in termini di frequenze caratteristiche della vibrazione di taglio, la presenza di componenti di componenti dell'eccitazione non tenute in considerazione nei modelli utilizzati.

### 3.2) Identificazione dei modelli modali sperimentali

Sono stati identificati, tramite analisi modale sperimentale, un modello della macchina fresatrice senza utensile e un modello della macchina fresatrice con utensile montato. In entrambi i casi il mandrino della macchina è stato posizionato nella configurazione di lavoro intermedia; la posizione lungo l'asse  $z$  è stata scelta in modo da far cadere l'asse mandrino sulla mezzeria della tavola porta pezzo. Questa configurazione intermedia è stata scelta come rappresentativa delle proprietà modali della macchina che sono soggette a piccole variazioni durante lo spostamento del mandrino in fase di lavorazione.

La misura delle FRFs è stata realizzata utilizzando un martello strumentato ENDEVCO con un sensore di forza piezoelettrico e gli accelerometri posizionati come in Figura 5. Le FRFs sono state ottenute mediando circa 40 prove per ciascun grado di libertà eccitato, in questo modo sono stati ottenuti degli andamenti della coerenza prossimi a uno nel range di frequenze di interesse (20-3000 Hz). La linearità della struttura è stata controllata confrontando le FRFs ottenute con 3 diversi livelli di eccitazione crescente.

Una volta raccolte le FRFs sperimentali, i due modelli sono stati identificati utilizzando la tecnica LSCE (Least Square Complex Exponential) esponenziali complessi ai minimi quadrati implementata nel software LMS TestLab. In entrambi i casi è stata scelta l'identificazione di un modello con smorzamento reale. I gradi di libertà sperimentali utilizzati per l'identificazione coinvolgono solo le traslazioni nel piano  $yz$ ; questa scelta è stata dettata dal tipo di modello delle forze di taglio utilizzato per gli studi sul chatter che non include componenti assiali lungo  $x$ .

Per il modello modale della macchina fresatrice senza utensile e portautensile sono stati identificati 10 modi propri di vibrare i cui valori di frequenza naturale e smorzamento sono riportati in Tabella 2. Il confronto tra le FRFs sperimentali e quelle sintetizzate, utilizzando il modello, è riportato in Figura 16.

**Tabella 2** Frequenze naturali e coefficienti di smorzamento del modello modale della macchina senza utensile

n. modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_n$ [Hz]	112.9	297.2	370.6	476.8	605.0	718.1	1405.7	2044.4	2054.9	2117.3
$\zeta_n$ [%]	4.1	3.2	4.3	3.3	4.7	4.9	0.8	1.5	1.1	1.6

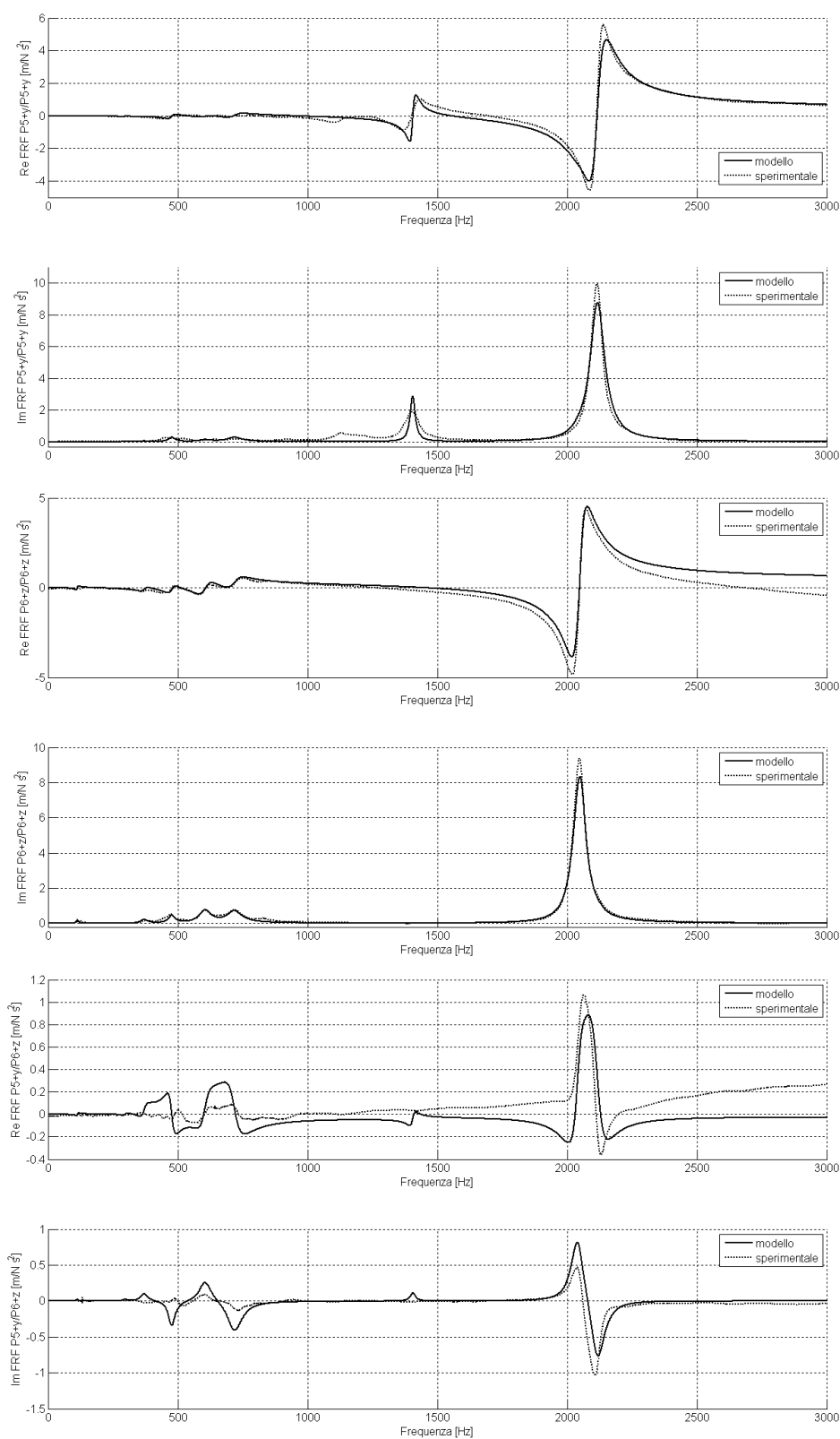
Il modello modale di macchina completa è stato ottenuto montando l'utensile (con relativo portautensile) rappresentato in Figura 4, dotato di 4 taglienti ad inserto, di lunghezza complessiva  $L=400$  mm e diametro in corrispondenza della punta  $D=40$  mm. In questa configurazione, l'accelerometro triassiale è stato spostato dalla posizione P4, sulla morsa portapezzo, alla posizione F4 sulla punta dell'utensile (Figura 5).

In questo caso sono stati identificati solo 2 modi propri di vibrare i cui valori di frequenza naturale e smorzamento sono riportati in Tabella 3 e verranno utilizzati per le simulazioni numeriche del modello 2 gdl illustrate nel paragrafo successivo. Il confronto tra le FRFs sperimentali e quelle sintetizzate, utilizzando il modello, è riportato in Figura 17.

**Tabella 3** Frequenze naturali e coefficienti di smorzamento del modello modale 2 gdl di macchina e utensile.

$\omega_{nz}/2\pi$ [Hz]	$\zeta_{nz}$ [%]	$m_{nz}$ [kg]	$\omega_{ny}/2\pi$ [Hz]	$\zeta_{ny}$ [%]	$m_{ny}$ [kg]
226	1.2	1.0	237	1.0	1.0



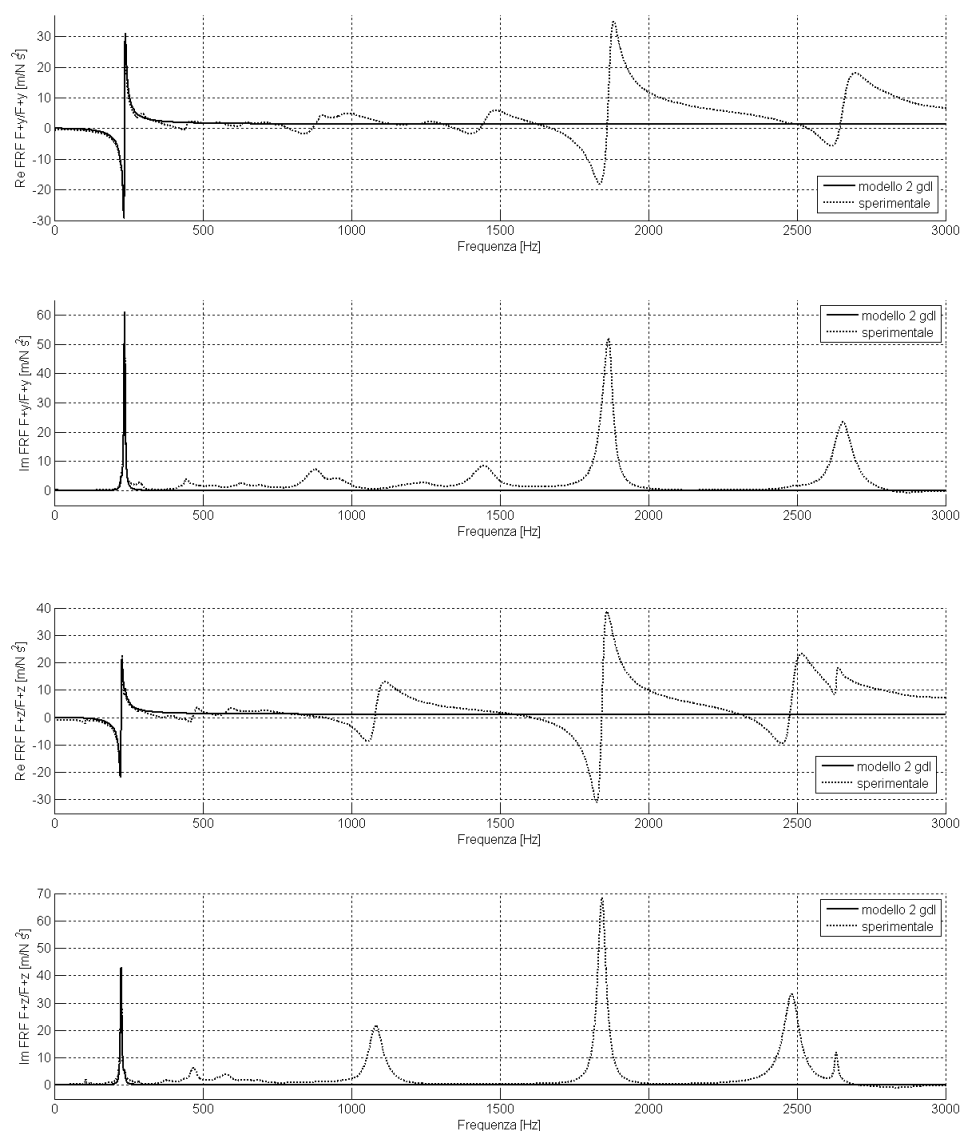


**Figura 16** Confronto tra le FRFs sperimentali e quelle sintetizzate della macchina fresatrice senza utensile relative ai punti in prossimità dell'attacco del portautensile P5 e P6.

Pur avendo utilizzato un modello di smorzamento semplice e un numero di modi limitato, per il modello del telaio della macchina fresatrice, la congruenza tra le FRFs sperimentali e quelle sintetizzate risulta buona, soprattutto per le FRFs dirette (eccitazione e risposta lungo lo stesso asse).

Risulta evidente, dalla Figura 17, che il modello della macchina completa di utensile a 2 gdl è estremamente semplificato e non riesce a cogliere il comportamento dinamico del sistema sopra i 400 Hz.

È necessario considerare che, con questo approccio, non vengono tenute in considerazione, perché ritenute trascurabili per questa applicazione, le variazioni delle proprietà modali della macchina con lo spostamento del mandrino lungo gli assi e con la velocità di rotazione del mandrino (gli effetti giroscopici agenti sull'utensile variano la rigidezza flessionale dell'utensile).



**Figura 17** Confronto tra le FRFs sperimentali e quelle sintetizzate utilizzando il modello a 2 gdl relative alla punta dell'utensile F4.

### 3.3) Simulazioni numeriche e validazione sperimentale del modello a 2 gdl

I parametri del modello a 2 gdl sono stati identificati tramite analisi modale sperimentale eseguita sulle FRFs raccolte sulla macchina completa di utensile. I valori di tali parametri sono riportati nella Tabella 3.

Applicando il metodo della semi-discretizzazione, descritto nel paragrafo 2.3, sono state calcolate le mappe di stabilità e i diagrammi delle frequenze di chatter per diverse condizioni di lavoro: in Figura 19 sono riportati i diagrammi per lavorazioni ad immersione radiale  $a/D=50\%$  e in Figura 20 sono riportati i diagrammi per lavorazioni ad immersione radiale  $a/D=25\%$ . Il range di velocità angolare scelto, coincidente con il range di utilizzo della macchina fresatrice utilizzata per le prove, è tra 2000 e 6000 *rpm*.

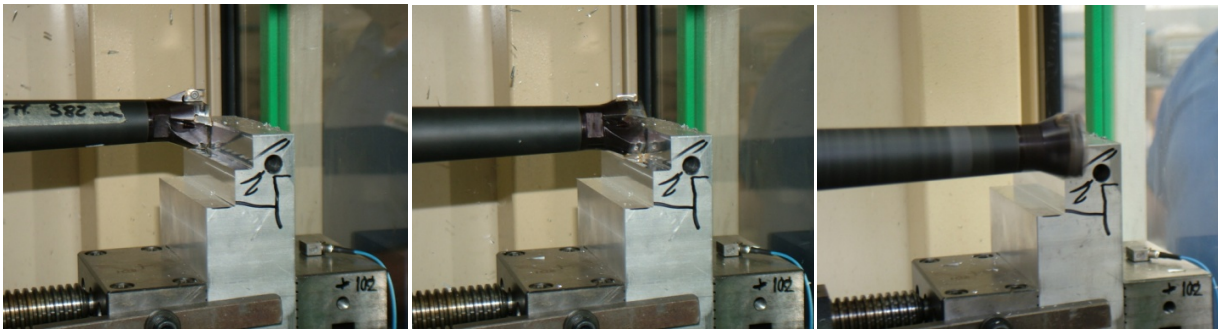
Confrontando i due diagrammi delle frequenze di chatter, si osserva che il chatter si manifesta principalmente come una biforcazione di Hopf associata ad un moto quasi periodico; compaiono due frequenze di chatter per ogni armonica della frequenza di passaggio del dente come formulato nell'equazione (42), riportata per comodità:

$$\omega_H = \pm \omega_c + n \frac{2\pi}{\tau} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad \omega_c = \frac{\ln \mu}{\tau}$$

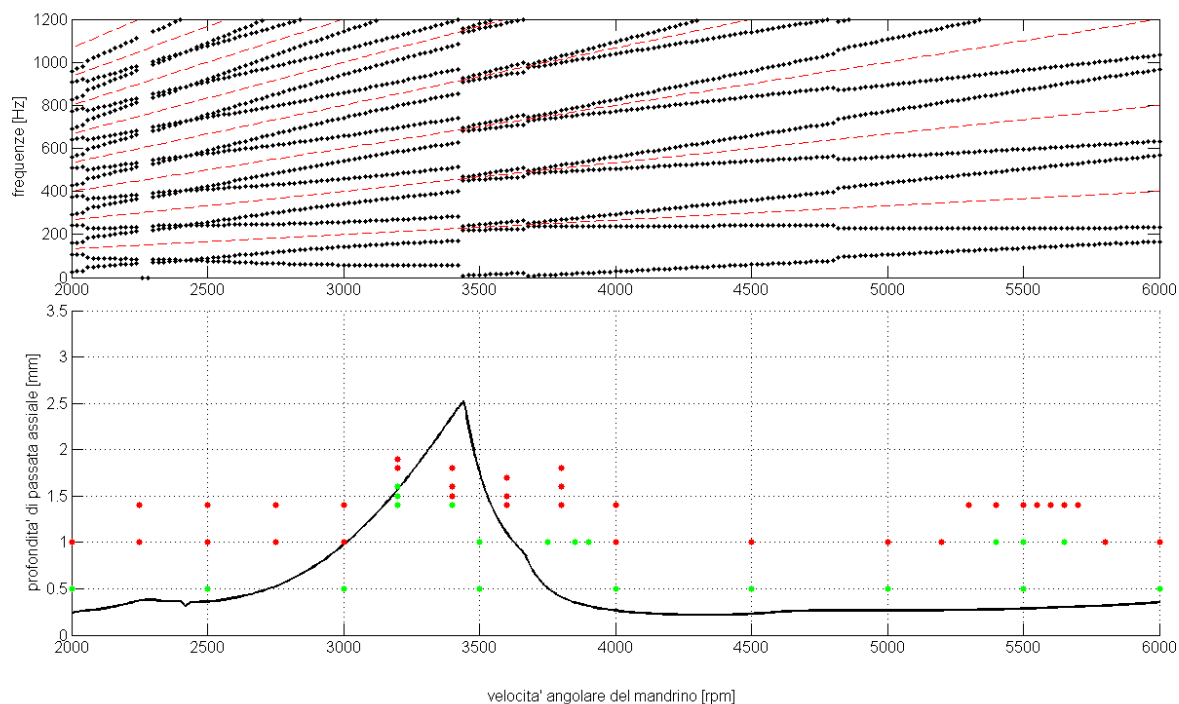
Il chatter si manifesta come una biforcazione period doubling, associata cioè ad un moto periodico, solo per basse immersioni radiali: si riscontra solo nel diagramma delle frequenze associato alle lavorazioni con  $a/D=25\%$  (Figura 18), nella zona compresa tra 2500 e 2750 *rpm* dove compare una sola frequenza di chatter per ogni armonica della frequenza di passaggio del dente come formulato nell'equazione (43), riportata per comodità:

$$\omega_{PD} = \frac{\pi}{\tau} + n \frac{2\pi}{\tau} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad \omega_c = \frac{\ln(-1)}{\tau} = \frac{\pi}{\tau}$$

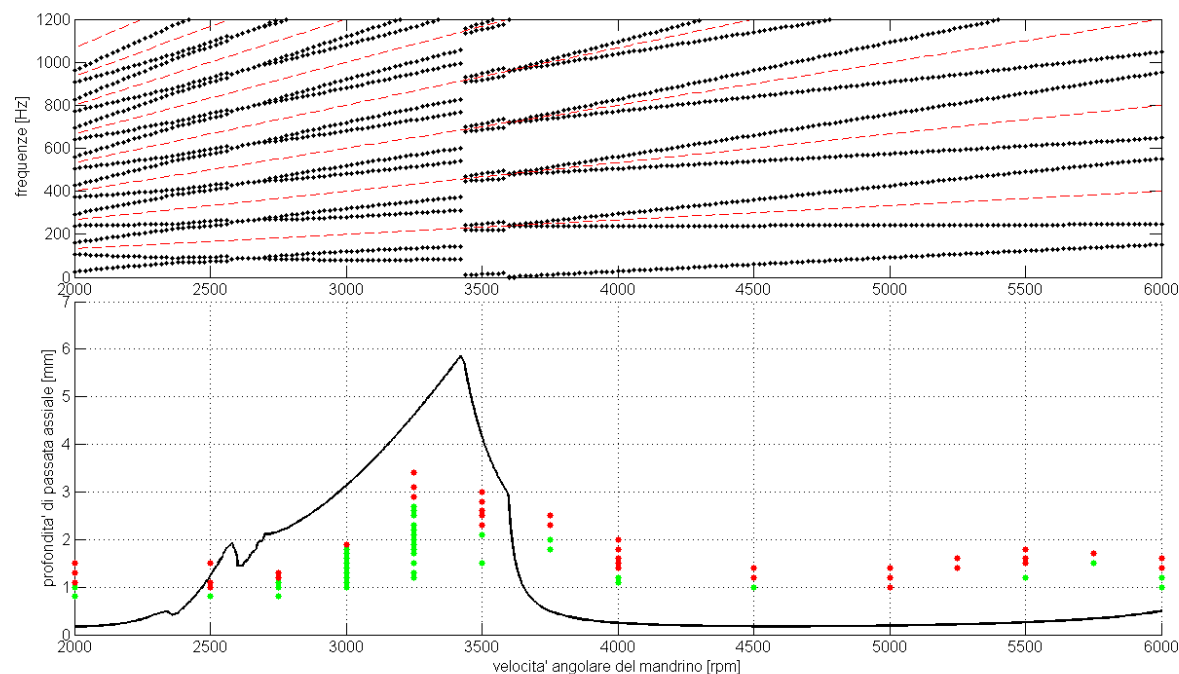
Nei diagrammi di stabilità di Figura 19 e Figura 20 sono anche riportati i giudizi sulla stabilità delle lavorazioni eseguite durante la campagna di prove sperimentali. Tutte le lavorazioni sono state eseguite muovendo la fresa lungo l'asse  $z$  su blocchi di alluminio di uguale dimensione (Figura 18). È stato mantenuto per tutte le lavorazioni lo stesso valore di avanzamento  $f=0.075$  mm/dente giro.



**Figura 18** Lavorazioni con  $a/D=50\%$  eseguite durante la campagna di prove sperimentali.



**Figura 19** In alto: diagramma delle frequenze di chatter (punti neri) e delle frequenze di passaggio del dente (linee tratteggiate rosse). In basso: diagramma di stabilità per il modello a 2 gdl, i punti verdi sono le condizioni di lavoro sperimentalmente stabili e i punti rossi sono le condizioni di lavoro sperimentalmente instabili. Immersione radiale  $a/D=50\%$ .



**Figura 20** In alto: diagramma delle frequenze di chatter (punti neri) e delle frequenze di passaggio del dente (linee tratteggiate rosse). In basso: diagramma di stabilità per il modello a 2 gdl, i punti verdi sono le condizioni di lavoro sperimentalmente stabili e i punti rossi sono le condizioni di lavoro sperimentalmente instabili. Immersione radiale  $a/D=25\%$ .

I giudizi sulla stabilità sono stati assegnati a ciascuna lavorazione basandosi sull'analisi del rumore emesso, sull'analisi visiva della finitura superficiale realizzata sui pezzi e sull'analisi degli spettri dei segnali accelerometrici raccolti. I punti di lavoro giudicati stabili sono stati riportati sui digrammi di stabilità come punti verdi mentre quelli instabili come punti rossi. In entrambi i casi riportati in Figura 19 e in Figura 20, la curva limite di stabilità ottenuta dal modello a 2 gdl è concorde solo qualitativamente con le misure sperimentali. Per esempio nel caso  $a/D=25\%$ , sia il modello che i dati sperimentali presentano una zona più stabile tra i 2500 e i 3500 *rpm*, ma le profondità di passata assiale critiche predette dal modello sono all'incirca 1 *mm* più elevate di quelle rilevate sperimentalmente, con errori di previsione nell'ordine del 40-50%.

Anche le frequenze di chatter predette dal modello 2 gdl risultano diverse da quelle rilevate sperimentalmente: in questo caso però la differenza è sia quantitativa che qualitativa. Osservando lo spettro dell'accelerazione rilevata dal trasduttore posizionato nel punto P6+z durante una lavorazione instabile, effettuata a velocità angolare  $\Omega=4000$  *rpm* con  $\delta=1.5$  *mm* e  $a/D=25\%$  (Figura 21), si osservano i picchi della forzante sia in corrispondenza delle armoniche della frequenza di passaggio del dente  $f_{th}$  (indicate con il simbolo: ○) come predetto dal modello, sia in corrispondenza delle armoniche della frequenza legata alla velocità di rotazione  $f_{om}$  (indicate con il simbolo: □) come osservato sperimentalmente nel paragrafo 3.1:

$$f_{om} = \frac{4000}{60} = 66.7 \text{ Hz} \quad f_{th} = N f_{om} = 4 \cdot 66.7 = 266.7 \text{ Hz}$$

La frequenza principale di chatter osservata sperimentalmente risulta  $f_c=88$  *Hz*, mentre quella predetta dal modello (Figura 20) risulta pari a 43 *Hz*. Riscrivendo l'equazione (42) si ottengono le frequenze di chatter:

$$f_H = n f_{th} \pm f_c \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad n \in \mathbb{N} \quad (110)$$

Applicando l'equazione (110), utilizzando la  $f_c=88$  *Hz* osservata sperimentalmente, si ottengono le frequenze di chatter, nel caso di una biforcazione di tipo Hopf, predette qualitativamente dal modello:

$f_{H0} = 88 \text{ Hz}$	$n = 0$
$f_{H1} = 266.7 - 88 = 178.7 \text{ Hz}$	$n = 1$
$f_{H2} = 266.7 + 88 = 354.7 \text{ Hz}$	$n = 1$
$f_{H3} = 2 \cdot 266.7 - 88 = 445.4 \text{ Hz}$	$n = 2$
$f_{H4} = 2 \cdot 266.7 + 88 = 621.4 \text{ Hz}$	$n = 2$
$f_{H5} = 3 \cdot 266.7 - 88 = 712.1 \text{ Hz}$	$n = 3$
$f_{H6} = 3 \cdot 266.7 + 88 = 888.1 \text{ Hz}$	$n = 3$

in corrispondenza delle quali si osservano chiaramente i picchi dello spettro (indicati con il simbolo: △) in Figura 21. Nello spettro rilevato sperimentalmente si osservano però altri picchi (indicati con il simbolo: ★) non predetti, neanche qualitativamente dal modello, che sembrano essere legati alla vibrazione di chatter. Analizzando le frequenze di questi picchi si osservato un loro legame con le armoniche della frequenza legata alla velocità di rotazione  $f_{om}$ .

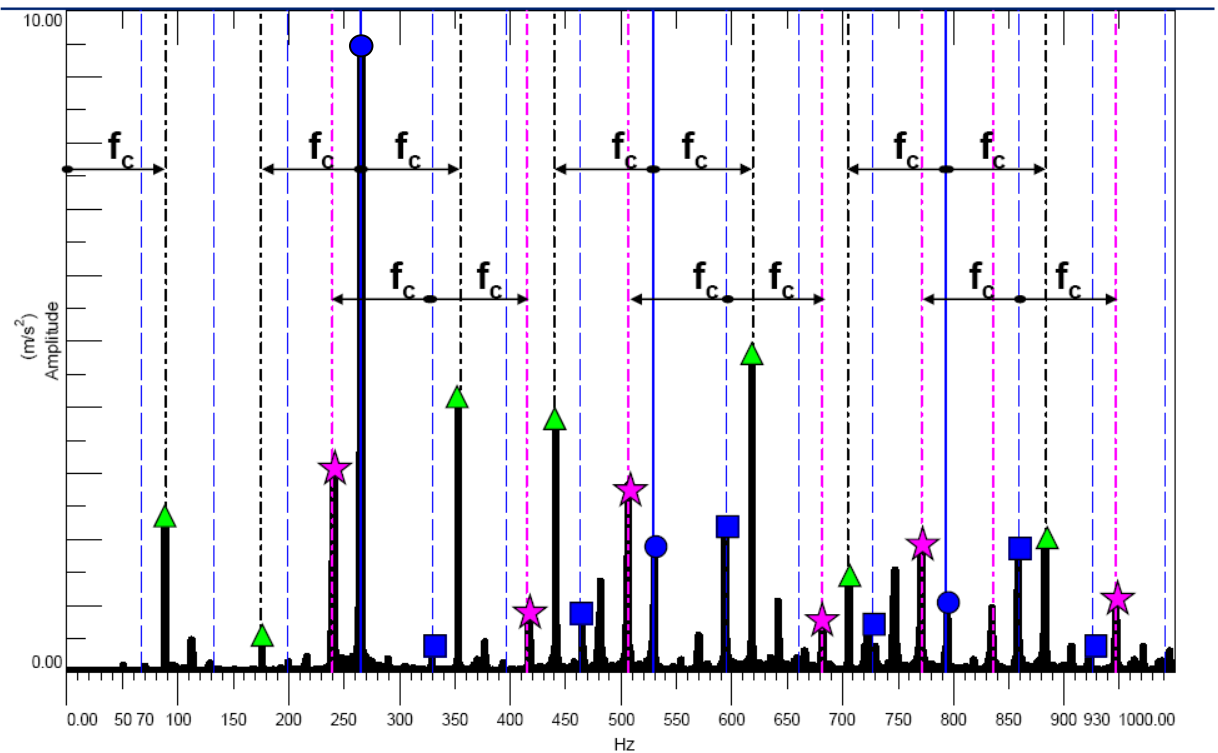
Questo legame è analogo a quello individuato dall'equazione (110) ed esprime i valori delle nuove frequenze di chatter trovate sperimentalmente:

$$f_{HS} = n f_{om} \pm f_c \quad n=0,1,2,\dots \quad n \in \mathbb{N} \quad (111)$$

Applicando l'equazione (111), analogamente a quanto fatto per l'equazione (110), si ottengono i valori delle frequenze di chatter sperimentali:

$f_{HS1} = 2 \cdot 66.7 - 88 = 45.4 \text{ Hz}$	$n = 2$	$f_{HS7} = 6 \cdot 66.7 - 88 = 312.2 \text{ Hz}$	$n = 6$
$f_{HS2} = 3 \cdot 66.7 - 88 = 112.1 \text{ Hz}$	$n = 3$	$f_{HS8} = 7 \cdot 66.7 - 88 = 378.9 \text{ Hz}$	$n = 7$
$f_{HS3} = 66.7 + 88 = 154.7 \text{ Hz}$	$n = 1$	$f_{HS9} = 5 \cdot 66.7 + 88 = 421.5 \text{ Hz}$	$n = 5$
$f_{HS4} = 2 \cdot 66.7 + 88 = 221.4 \text{ Hz}$	$n = 2$	$f_{HS10} = 6 \cdot 66.7 + 88 = 488.2 \text{ Hz}$	$n = 6$
$f_{HS5} = 5 \cdot 66.7 - 88 = 245.5 \text{ Hz}$	$n = 5$	$f_{HS11} = 9 \cdot 66.7 - 88 = 512.3 \text{ Hz}$	$n = 9$
$f_{HS6} = 3 \cdot 66.7 + 88 = 288.1 \text{ Hz}$	$n = 3$	$f_{HS12} = 7 \cdot 66.7 - 88 = 554.9 \text{ Hz}$	$n = 7$

in corrispondenza di alcune delle quali ( $f_{HS5}, f_{HS9}, f_{HS11}$ ) si osservano i picchi dello spettro (★) in Figura 21.



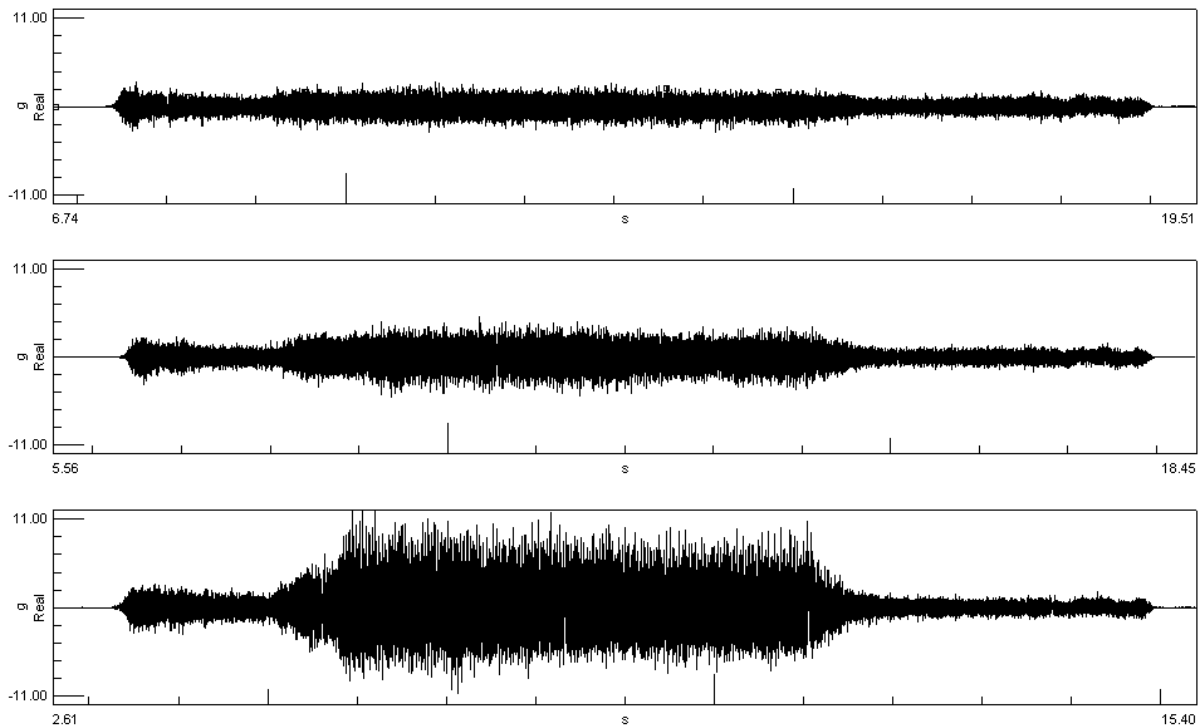
**Figura 21** Spettro dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione a  $\Omega=4000 \text{ rpm}$  con  $\delta=1.5 \text{ mm}$  e  $a/D=25\%$ . Legenda: ○ sono le armoniche della frequenza di passaggio del dente  $f_{th}$ , □ sono alcune armoniche della frequenza legata alla velocità di rotazione  $f_{om}$ , △ sono le frequenze di chatter legate alle armoniche della  $f_{th}$ , ★ sono le frequenze di chatter legate alle armoniche della  $f_{om}$ .

La curva limite dei diagrammi di stabilità definisce il confine tra la regione di lavorazione stabile e quella instabile. I punti di lavoro della regione instabile non presentano però tutte lo stesso grado di instabilità: a parità di velocità angolare del mandrino, più un punto di lavoro si allontana dalla curva limite più la vibrazione di chatter risulta violenta e associata a vibrazione di ampiezza elevata.

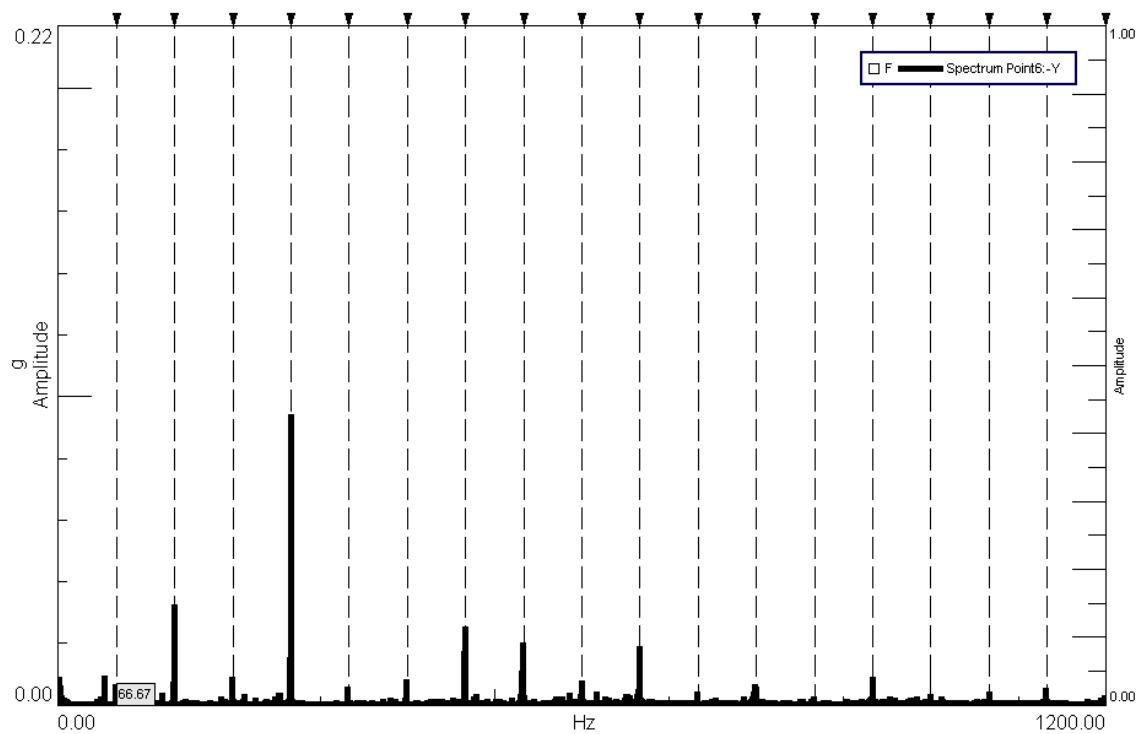
Osservando le storie temporali dell'accelerazione rilevata sul mandrino durante 3 lavorazioni eseguite a uguale velocità angolare  $\Omega=4000 \text{ rpm}$  e a profondità assiale di passata crescente (Figura 22), si nota come l'ampiezza delle accelerazioni è tanto maggiore quanto è più severo il grado di instabilità del chatter. Andando poi ad analizzare gli spettri relativi alle 3 lavorazioni (Figura 23, Figura 24 e Figura 25) si nota come, all'aumentare della profondità di passata assiale (e quindi all'aumentare del grado di instabilità), crescano significativamente le ampiezze relative alle frequenze di chatter e aumenti il numero di picchi apprezzabili relativi sempre alle frequenze di chatter. Le ampiezze dei picchi in corrispondenza delle frequenze di chatter non sono prevedibili tramite il modello e il metodo SD, questo approccio serve infatti a individuare frequenze di chatter e limiti di stabilità e non a prevedere l'andamento dell'instabilità.

Nell'assegnare i giudizi di stabilità, riportati nei diagrammi di stabilità di Figura 19 e Figura 20, relativi alle lavorazioni sono stati osservati gli spettri delle accelerazioni misurate sul mandrino. Nel caso in cui negli spettri non fossero visibili picchi rilevanti al di fuori delle armoniche della velocità di rotazione la lavorazione è stata giudicata stabile. Non è invece possibile assegnare giudizi di stabilità della lavorazioni basati sul livello del segnale accelerometrico nel dominio del tempo, poiché tale livello varia con la quantità di materiale asportato e quindi aumenta all'aumentare della profondità di passata assiale, indipendentemente dal'insorgere del chatter. Questo fenomeno è osservabile paragonando le storie temporali, riportate in Figura 26, di 4 lavorazioni eseguite a uguale velocità angolare  $\Omega=3250 \text{ rpm}$  e a profondità assiale di passata crescente. La terza lavorazione a  $\delta=2.9 \text{ mm}$  è stabile, la quarta lavorazione  $\delta=3.4 \text{ mm}$  è soggetta a chatter ma i livelli dei segnali accelerometrici nel dominio del tempo sono molto simili.

Dal confronto tra i dati sperimentali e i risultati del modello 2 gdl si evince che quest'ultimo è in grado di fornire solo indicazioni qualitative sulla stabilità del processo di taglio e sulle caratteristiche spettrali delle vibrazioni associate. Gli elevati margini di errore sulla predizione di stabilità ottenuta dal modello 2 gdl sono da imputare principalmente alle differenze, evidenziate nelle FRFs riportate in Figura 17, tra il modello viscoelastico della macchina e il reale comportamento dinamico della macchina fresatrice.

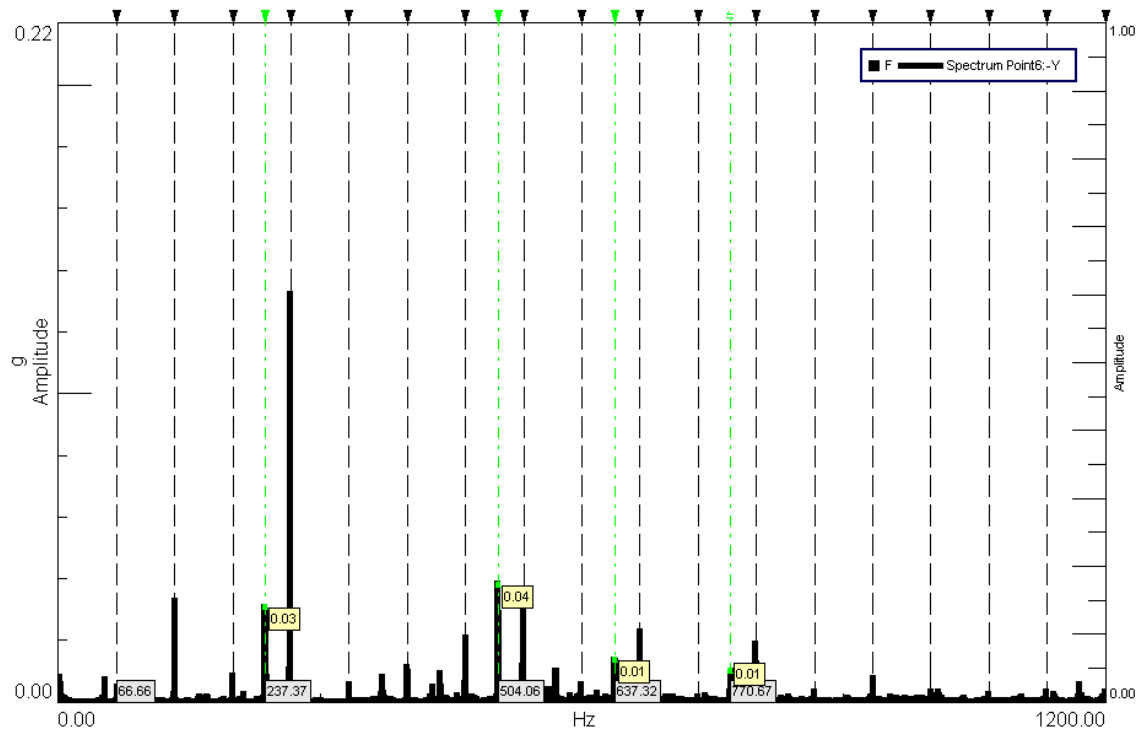


**Figura 22** Andamenti temporali delle accelerazioni rilevate nel punto P6+z durante tre lavorazioni a  $\Omega=4000 \text{ rpm}$  con  $\delta=1.1 \text{ mm}$  (stabile),  $\delta=1.4 \text{ mm}$  (chatter leggero),  $\delta=2.0 \text{ mm}$  (chatter severo) e  $a/D=25\%$ .

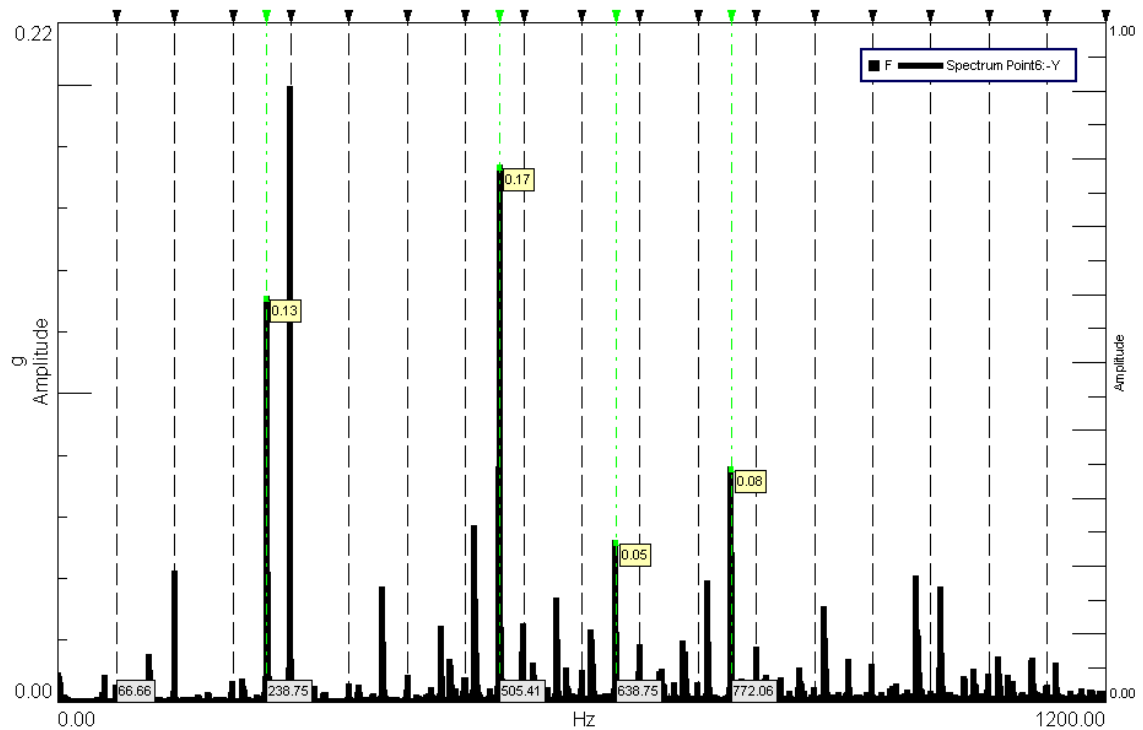


**Figura 23** Spettro dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione stabile a  $\Omega=4000 \text{ rpm}$  con  $\delta=1.1 \text{ mm}$  e  $a/D=25\%$ . Le linee tratteggiate sono in corrispondenza delle armoniche della velocità di rotazione.

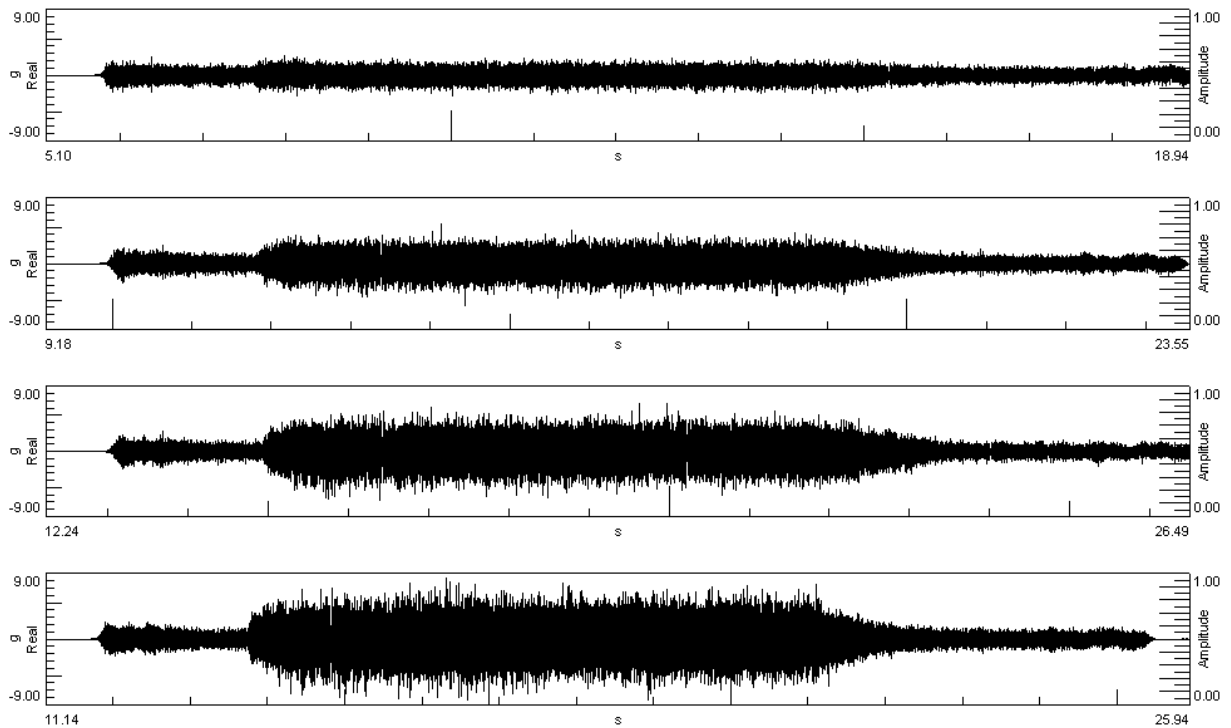




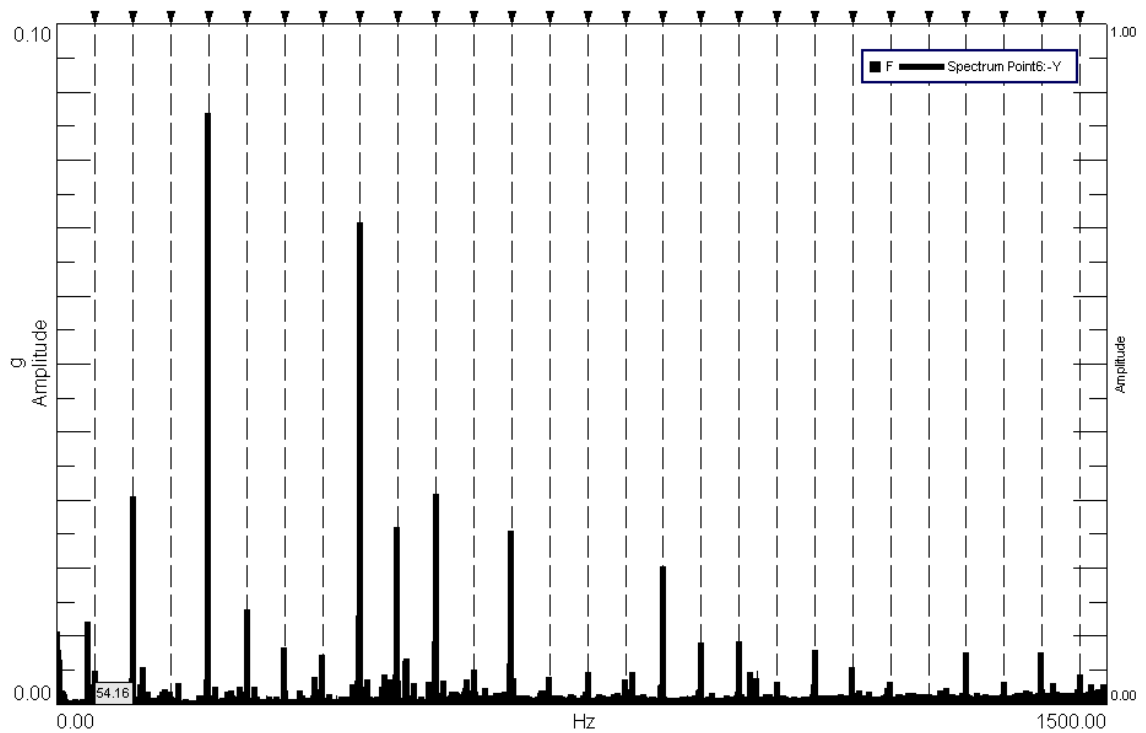
**Figura 24** Spettro dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione affetta da chatter leggero a  $\Omega=4000 \text{ rpm}$  con  $\delta=1.4 \text{ mm}$  e  $a/D=25\%$ . Le linee tratteggiate indicano le armoniche della velocità di rotazione, mentre quelle tratto-punto indicano le frequenze di chatter.



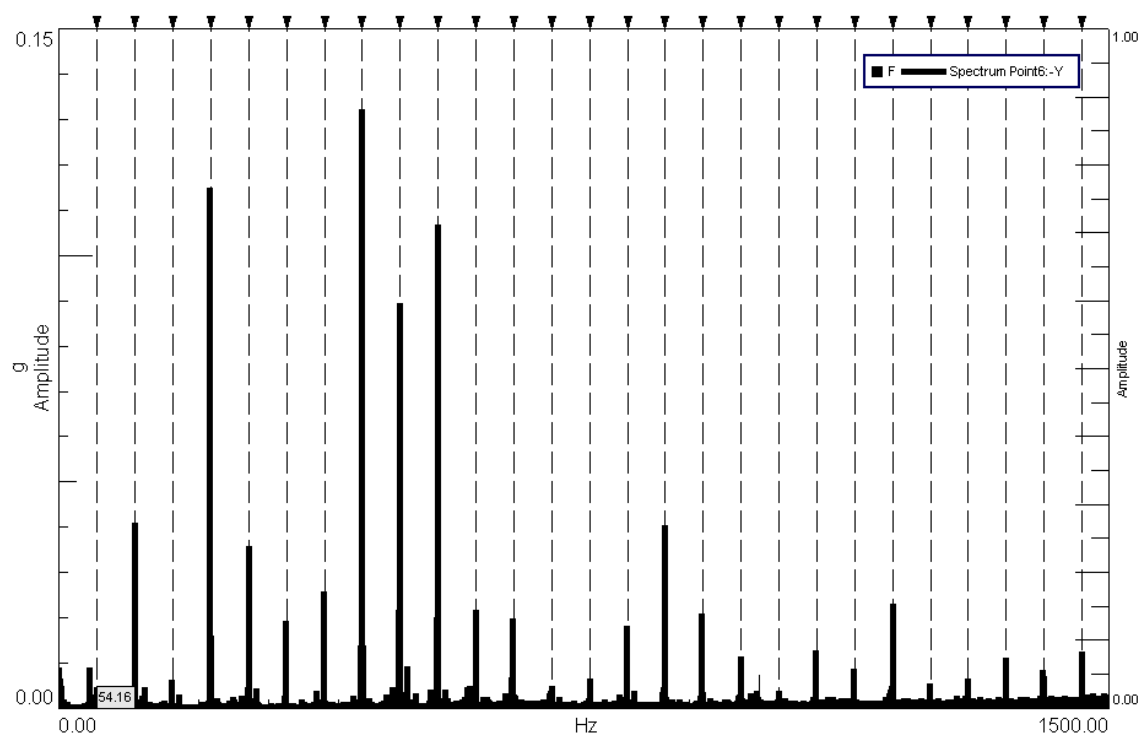
**Figura 25** Spettro dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione affetta da chatter severo a  $\Omega=4000 \text{ rpm}$  con  $\delta=2.0 \text{ mm}$  e  $a/D=25\%$ . Le linee tratteggiate indicano le armoniche della velocità di rotazione, mentre quelle tratto-punto indicano alcune frequenze di chatter.



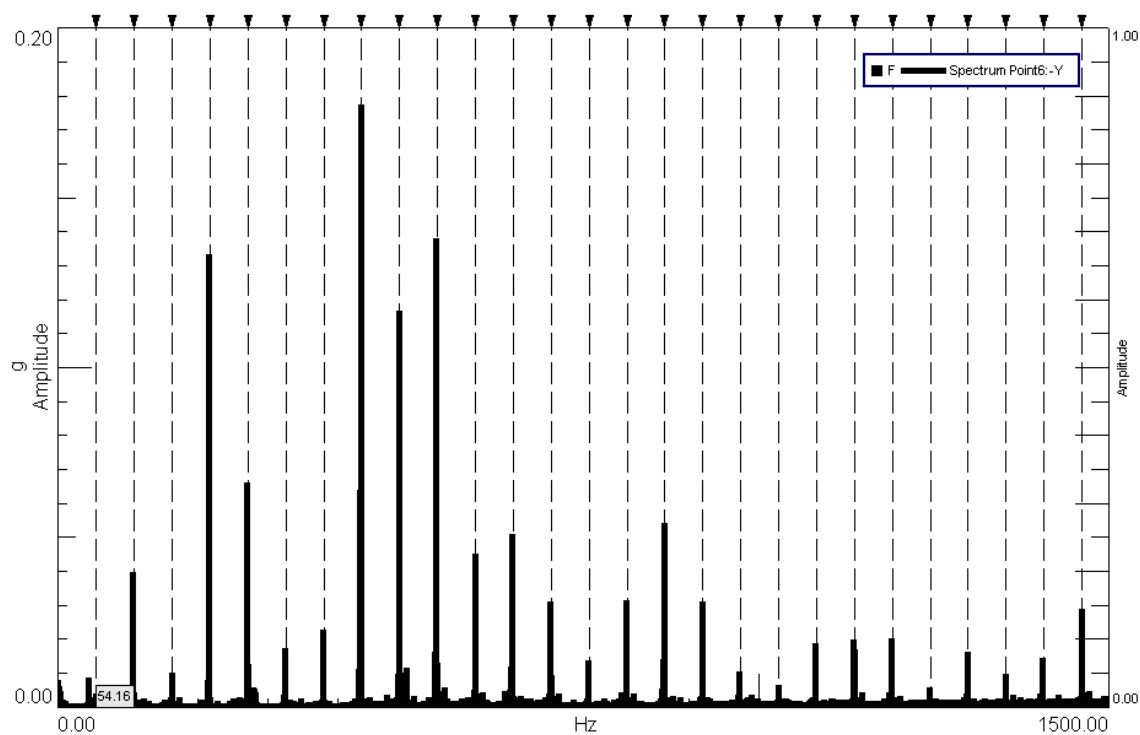
**Figura 26** Andamenti temporali delle accelerazioni rilevate nel punto P6+z durante quattro lavorazioni a  $\Omega=3250 \text{ rpm}$  con  $\delta=1.2 \text{ mm}$  (stabile),  $\delta=2.2 \text{ mm}$  (stabile),  $\delta=2.9 \text{ mm}$  (stabile),  $\delta=3.4 \text{ mm}$  (chatter) e  $a/D=25\%$ .



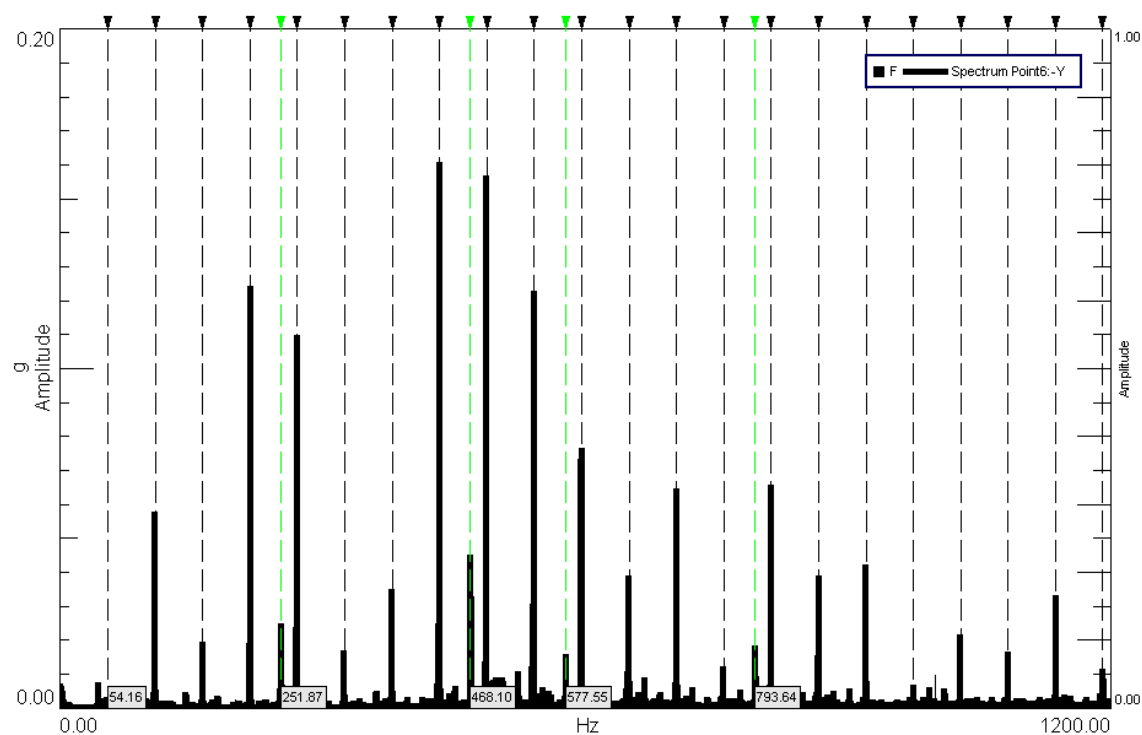
**Figura 27** Spettro dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione stabile a  $\Omega=3250 \text{ rpm}$  con  $\delta=1.2 \text{ mm}$  e  $a/D=25\%$ . Le linee tratteggiate sono in corrispondenza delle armoniche della velocità di rotazione.



**Figura 28** Spettro dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione stabile a  $\Omega=3250 \text{ rpm}$  con  $\delta=2.2 \text{ mm}$  e  $a/D=25\%$ . Le linee tratteggiate sono in corrispondenza delle armoniche della velocità di rotazione.



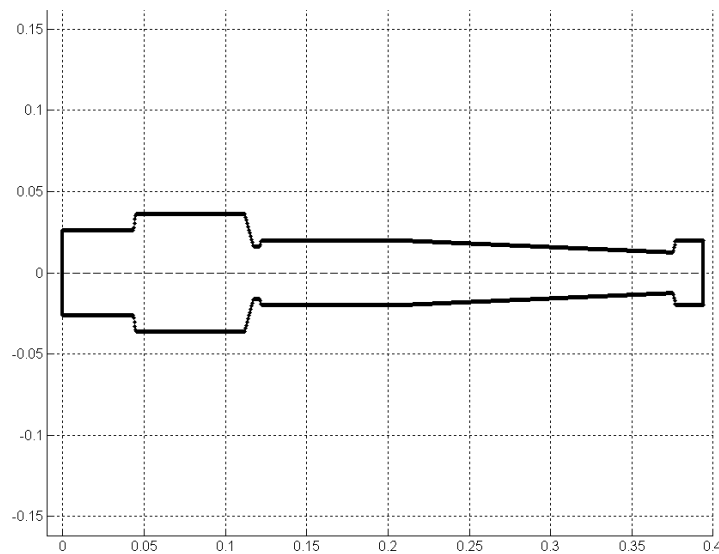
**Figura 29** Spettro dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione stabile a  $\Omega=3250 \text{ rpm}$  con  $\delta=2.9 \text{ mm}$  e  $a/D=25\%$ . Le linee tratteggiate sono in corrispondenza delle armoniche della velocità di rotazione.



**Figura 30** Spettro dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione, affetta da chatter, eseguita a  $\Omega=3250 \text{ rpm}$  con  $\delta=3.4 \text{ mm}$  e  $a/D=25\%$ . Le linee tratteggiate indicano le armoniche della velocità di rotazione, mentre quelle tratto-punto indicano alcune frequenze di chatter.

### 3.4) Simulazioni numeriche e validazione sperimentale del modello a $n$ gdl

Per poter identificare i parametri del modello analitico-sperimentale a  $n$  gdl, formulato secondo la procedura descritta nel paragrafo 2.5, sono state misurate le caratteristiche geometriche e il peso dell'utensile utilizzato per le prove, di lunghezza complessiva  $L=400\text{ mm}$  e diametro in corrispondenza della punta  $D=40\text{ mm}$ . L'area della sezione è stata descritta come circolare di raggio variabile, descritto da una funzione lineare a tratti dell'ascissa adimensionalizzata assiale  $\zeta$ . Una rappresentazione della geometria di questo utensile è riportata in Figura 31. Dal peso misurato e dal volume ricavato dalla geometria è stata stimata la densità media  $\rho=7690\text{ Kg m}^{-3}$ , mentre il modulo elastico  $E=225\cdot 10^3\text{ N mm}^{-2}$  è stato ricavato conoscendo il materiale di costruzione dell'utensile.

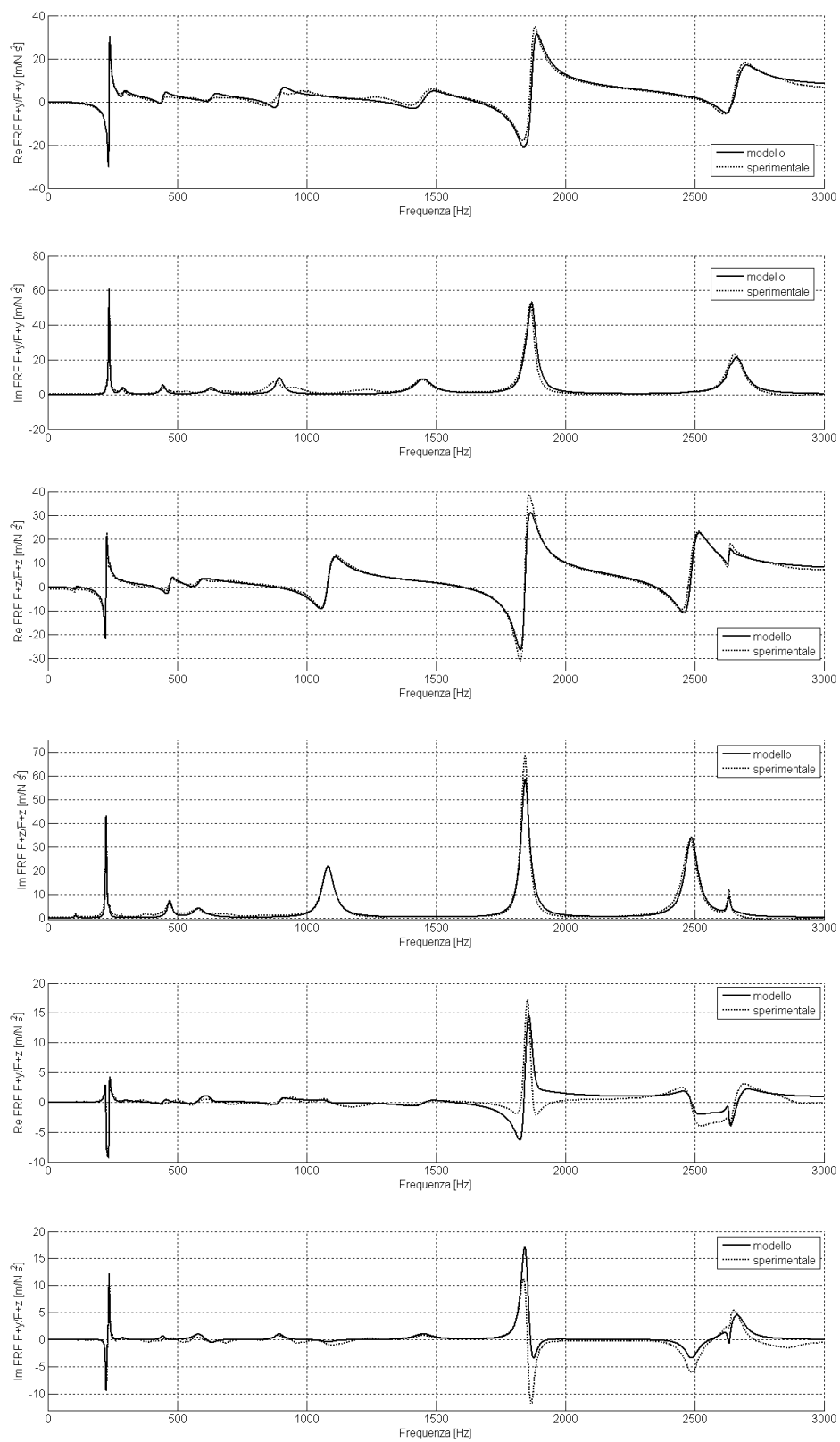


**Figura 31** Modello geometrico dell'utensile utilizzato per le prove.

Sono state utilizzate le prime  $m=8$  autofunzioni della trave libera-libera (2 per i modi rigidi e 6 per i modi flessibili) per ognuna delle due direzioni di deformazione della trave ( $y$  e  $z$ ). Utilizzando questi dati si ottiene un modello di utensile con 16 gdl le cui prima frequenza naturale, nel caso libero-libero, risulta pari a circa  $1230\text{ Hz}$ . Per quello che riguarda i coefficienti di smorzamento interno dell'utensile  $\zeta_i$ , sono stati inizialmente assunti valori random compresi fra 0.01 e 3%, che sono stati successivamente modificati (rimanendo nello stesso intervallo 0.01 e 3%) in modo da ottenere la miglior corrispondenza tra le FRFs sperimentali e quelle sintetizzate dal modello modale completo  $n$  gdl.

Il modello analitico di utensile così ottenuto è stato accoppiato al modello modale sperimentale del telaio completo di mandrino, i cui parametri modali, identificati tramite analisi modale sperimentale, sono riportati nella Tabella 2.

I valori di rigidità di accoppiamento scelti per i vincoli sono intorno a  $10^{10}\text{ N m}^{-1}$  per quelli alla traslazione e a  $10^9\text{ N m rad}^{-1}$  per quelli alla rotazione. Tali valori sono stati scelti sufficientemente elevati da far risultare le frequenze proprie delle molle maggiori di quelle della struttura. Mentre il limite superiore di tali valori è stato imposto da considerazioni numeriche riguardo il condizionamento della matrice di rigidità globale della struttura.



**Figura 32** Confronto tra le FRFs sperimentali e quelle sintetizzate utilizzando il modello  $n=16$  gdl della macchina fresatrice con utensile, rilevate sulla punta dell'utensile F4.

Il modello risultante dall'accoppiamento del modello analitico di utensile e del modello sperimentale di telaio si ottiene un modello modale della macchina fresatrice con 26 (10+16) gdl che viene condensato prendendo i primi 16 modi di vibrare. La condensazione modale riduce il range dinamico del modello limitandolo a 3000 Hz. Tale valore risulta pari a circa il doppio del valore richiesto per questa applicazione (velocità angolare massima pari a 6000 rpm). I parametri modali del modello  $n=16$  gdl della macchina fresatrice con l'utensile di lunghezza  $L=400$  mm montato, sono riportati nella Tabella 4:

**Tabella 4** Frequenze naturali e coefficienti di smorzamento del modello analitico-sperimentale  $n=16$  gdl di macchina e utensile.

n.modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f_n$ [Hz]	107	226	237	290	445	471	582	632	894	1082	1450	1845	1870	2488	2633	2662
$\zeta_n$ [%]	5.2	1.2	1.0	3.7	2.5	2.4	4.6	3.3	2.0	2.5	2.9	1.0	1.1	1.2	0.2	1.4

In Figura 32 sono riportati i confronti tra le FRFs stimate sperimentalmente e quelle sintetizzate utilizzando il modello  $n=16$  gdl. Le FRFs sintetizzate risultano congruenti con quelle sperimentali, tuttavia, per ottenere tale congruenza, è stata necessaria una lunga fase di tuning dei parametri di smorzamento  $\zeta_i$  dell'utensile realizzata tramite il confronto con le FRFs sperimentali.

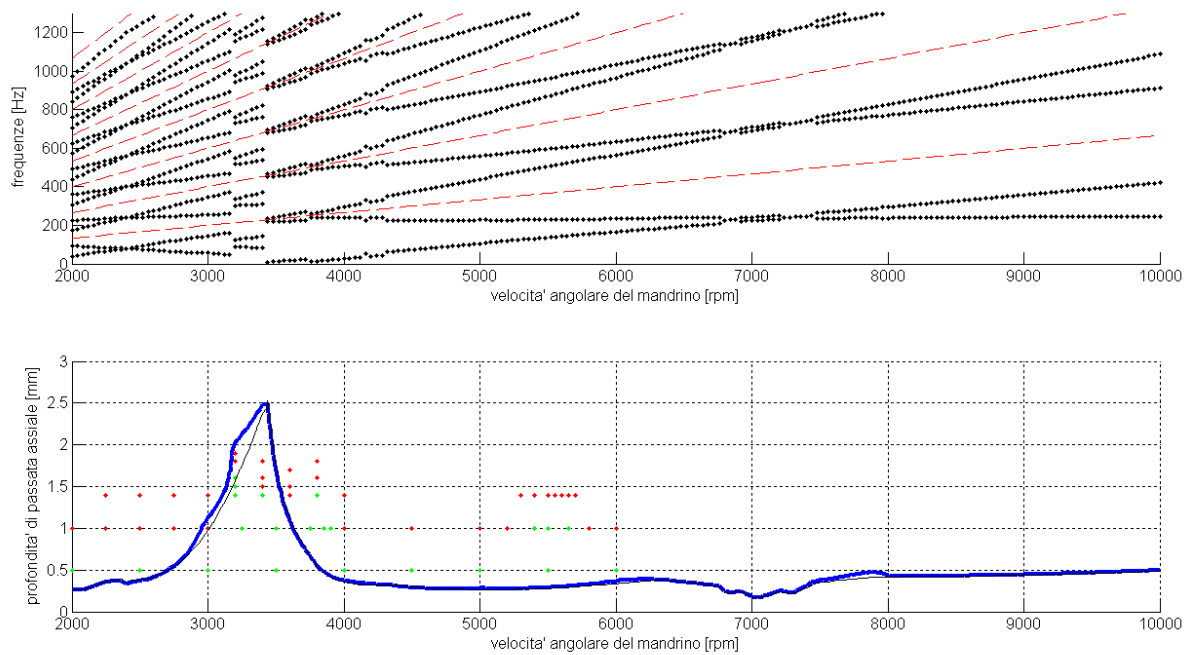
Applicando il metodo della semi discretizzazione al modello  $n=16$  gdl, sono stati ottenuti i diagrammi di stabilità e quelli delle frequenze di chatter per diverse configurazioni operative. In Figura 33 e in Figura 34 sono rappresentati i diagrammi ottenuti per due diversi valori di immersione radiale:  $a/D=50\%$  e  $a/D=25\%$ .

I diagrammi di stabilità del modello  $n=16$  gdl, rappresentati con linee blu, sono messi a confronto con i risultati sperimentali, rappresentati tramite i punti verdi (lavorazioni stabili) e i punti rossi (lavorazioni instabili), e con i diagrammi di stabilità ottenuti precedentemente dal modello 2 gdl. Il diagramma di stabilità per  $a/D=50\%$  (Figura 33) è sostanzialmente coincidente con quello calcolato utilizzando il modello 2 gdl; rimangono quindi le stesse incongruenze rispetto ai dati sperimentali, soprattutto nel range di velocità angolare del mandrino compreso fra i 4000 e i 6000 rpm. In questo range i dati sperimentali risultano più stabili di quanto predetto dal modello.

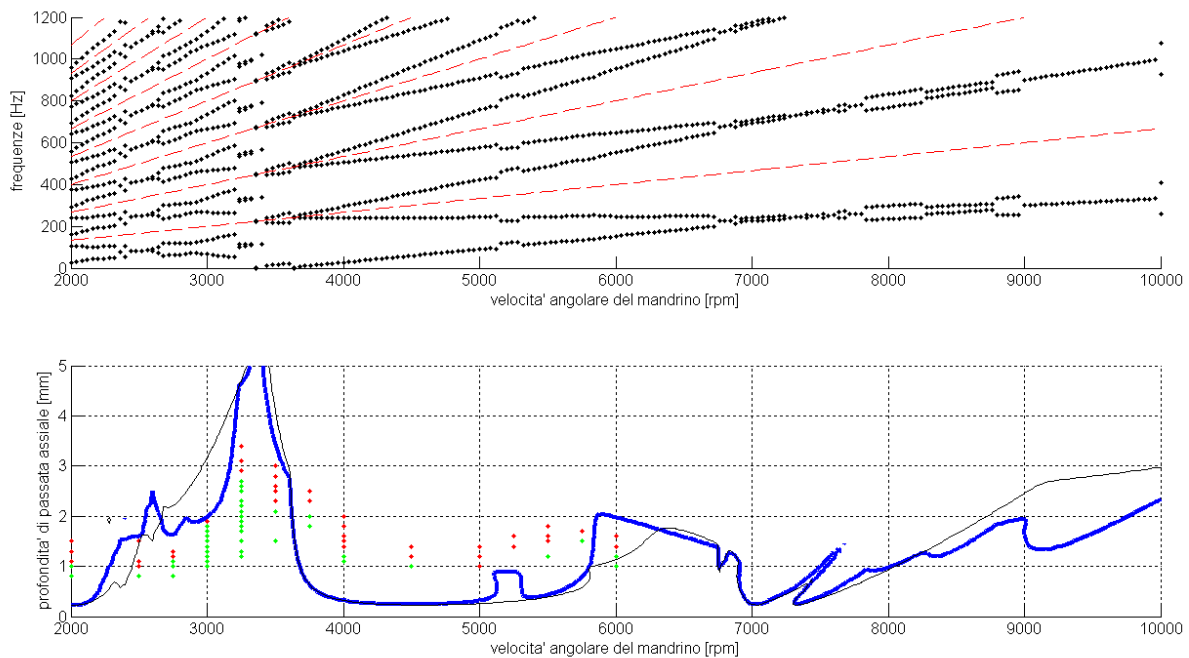
Nella seconda configurazione presa in esame, ovvero le lavorazioni ad immersione radiale  $a/D=25\%$ , si evidenziano delle discrepanze tra i diagrammi di stabilità calcolati utilizzando i due modelli. Tali discrepanze sono evidenti, in Figura 34, soprattutto attorno ai 3000 rpm, ai 6000 rpm e sopra gli 8500 rpm. Anche in questo caso, il diagramma di stabilità ottenuto dal modello analitico sperimentale non concorda con i risultati sperimentali, soprattutto nel range di velocità angolare del mandrino compreso fra i 4000 e i 6000 rpm. Solo intorno ai 3000 rpm la predizione di stabilità ottenuta con il modello 16 gdl è migliore, rispetto ai risultati sperimentali, di quella ottenuta con il modello 2 gdl.

Sono state individuate quattro possibili cause delle incongruenze rilevate tra i risultati sperimentali e quelli del modello analitico sperimentale:

- Modellazione dello smorzamento inadeguata: il modello di smorzamento viscoso utilizzato potrebbe non essere adeguato, lo smorzamento indotto dal processo di taglio (plasticizzazione del materiale) non è stato modellato. I diagrammi di stabilità sono molto sensibili allo smorzamento. Più lo smorzamento è elevato, più le curve limite di stabilità si alzano aumentando la superficie della regione stabile e viceversa.



**Figura 33** In alto: diagramma delle frequenze di chatter (punti neri) e delle frequenze di passaggio del dente (linee tratteggiate rosse). In basso: in blu il diagramma di stabilità per il modello a 16 gdl, in nero quello per il modello 2 gdl, i punti verdi sono le condizioni di lavoro sperimentalmente stabili e i punti rossi sono le condizioni di lavoro sperimentalmente instabili. Immersione radiale  $a/D=50\%$ .



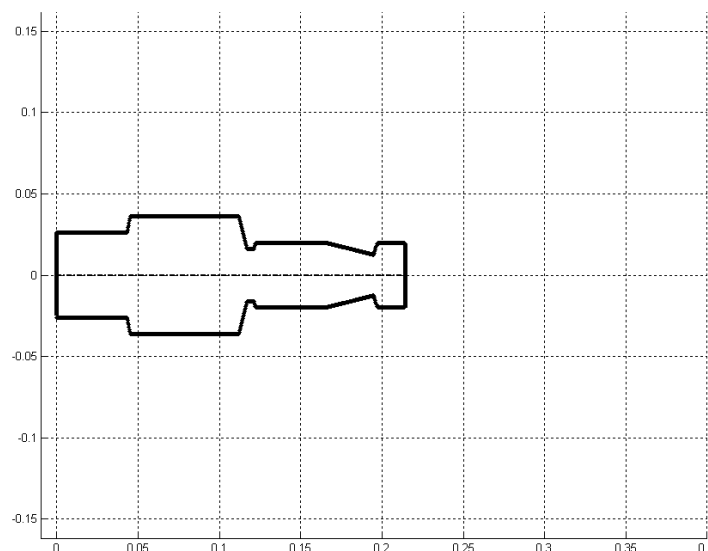
**Figura 34** In alto: diagramma delle frequenze di chatter (punti neri) e delle frequenze di passaggio del dente (linee tratteggiate rosse). In basso: in blu il diagramma di stabilità per il modello a 16 gdl, in nero quello per il modello 2 gdl, i punti verdi sono le condizioni di lavoro sperimentalmente stabili e i punti rossi sono le condizioni di lavoro sperimentalmente instabili. Immersione radiale  $a/D=25\%$ .



- Variazioni delle proprietà modali della macchina con la velocità di rotazione del mandrino e con la configurazione delle slitte. Possibili non linearità della struttura indotte dalla complessità dei componenti costruttivi della macchina fresatrice (guide, cuscinetti, attuatori) o dall'ampiezza elevata delle vibrazioni indotte dal processo di taglio.
- Errori nell'identificazione dei coefficienti di pressione di taglio  $K_t$  e  $K_n$  causati dalle azioni inerziali agenti sulla tavola dinamometrica che inficiano le misure delle forze di taglio.
- Nel modello dinamico proposto, il pezzo lavorato è stato ipotizzato come infinitamente rigido; nella realtà il pezzo è vincolato ad un montante del telaio che ha una certa cedevolezza. È possibile quindi che la predizione sulla stabilità delle vibrazioni di taglio sia influenzata dagli spostamenti, non modellati, del pezzo rispetto all'utensile.

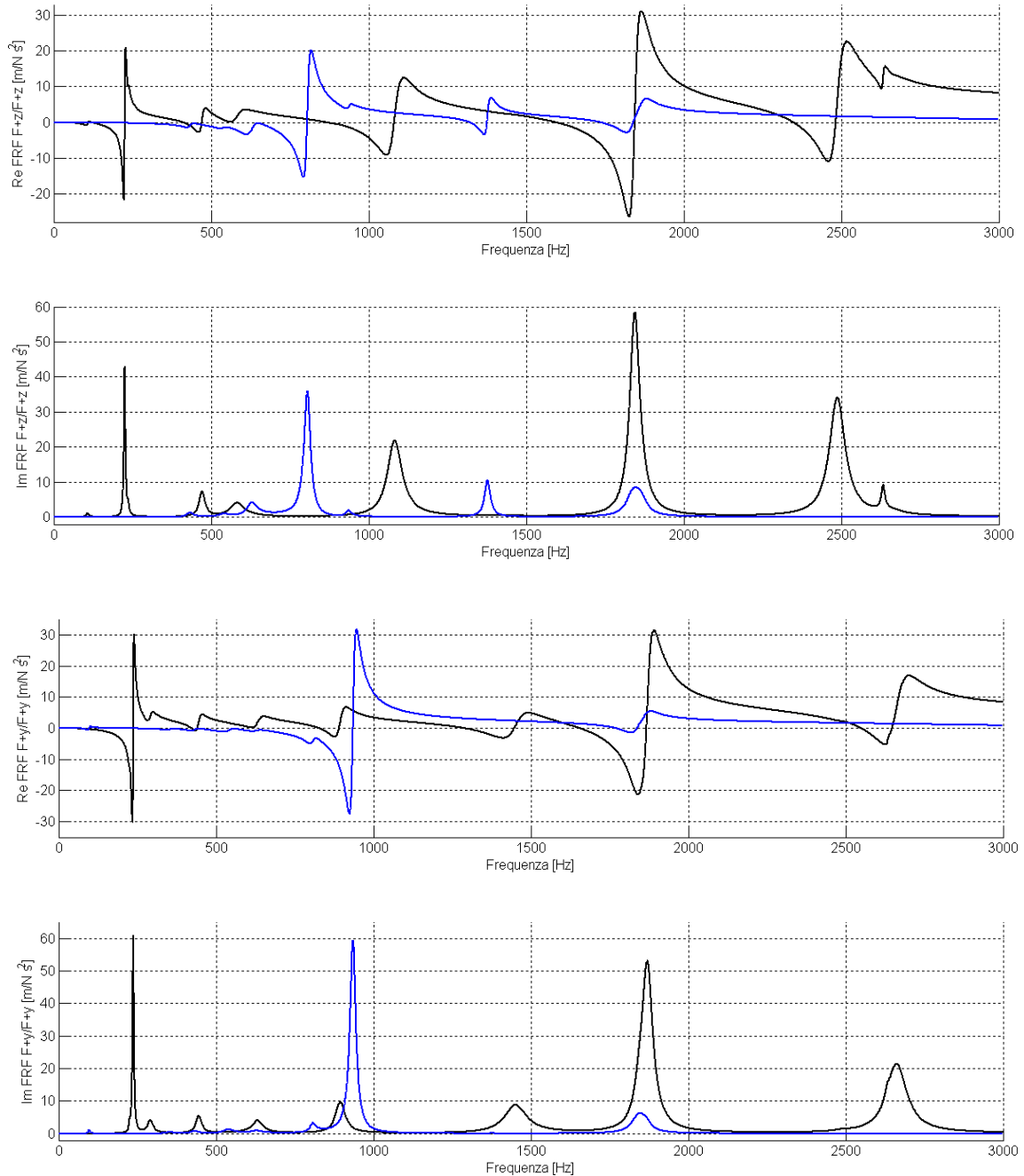
Nonostante le discordanze mostrate, la tecnica di modellazione analitico sperimentale proposta, consente di stimare le variazioni della risposta dinamica della macchina fresatrice dovute al montaggio di diversi utensili. La fase di tuning dei parametri  $\zeta_1$ , e la conseguente fase di misura delle FRFs sulla macchina in ciascuna configurazione di utensile, si rendono necessarie solo qualora si volesse una valutazione precisa della risposta del sistema. Tramite questi modelli è anche possibile ottenere delle indicazioni di massima sui valori dei parametri di taglio che massimizzano la velocità di asportazione di taglio senza pregiudicarne la stabilità.

In Figura 36 vengono mostrati, a titolo di esempio, i confronti tra le FRFs del modello  $n=16$  gdl nella configurazione con utensile lungo ( $L=400$  mm) e le FRFs del modello  $n=16$  gdl nella configurazione con un utensile più corto ( $L=210$  mm) di pari modulo elastico e diametro ( $D=40$  mm) montato con lo stesso portautensile (la geometria di tale utensile è rappresentata in Figura 35).



**Figura 35** Modello geometrico dell'utensile utilizzato per le prove.

Il montaggio di un utensile più rigido provoca un innalzamento delle frequenze dei primi due modi di vibrare della macchina utensile, in questo caso le frequenze passano da circa 250 Hz a circa 850 Hz, e un maggiore accoppiamento dei modi dell'utensile con quelli del telaio della macchina.



**Figura 36** Confronto tra le FRFs sintetizzate utilizzando il modello  $n$  gdl con l'utensile lungo ( $L=400\text{ mm}$ ) in nero e con l'utensile corto ( $L=210\text{ mm}$ ) in blu.

## CAPITOLO 4

### Monitoraggio e diagnostica della vibrazione di chatter in fresatura

#### 4.1) Sviluppo di un sistema di diagnostica real-time per la vibrazione di chatter

Come mostrato nei precedenti capitoli, la modellazione della dinamica delle macchine fresatrici e del processo di taglio presenta alcune difficoltà di applicazione, riscontrabili principalmente nella fase di identificazione dei parametri. Queste difficoltà comportano degli errori sulla mappatura delle condizioni di lavoro instabili. I diagrammi di stabilità, valutati applicando il metodo della semi discretizzazione ai modelli analitico sperimentali di macchina utensile, presentano alcune incongruenze rispetto ai risultati sperimentali. Per un'applicazione industriale, la tecnica di modellazione analitico sperimentale proposta potrebbe essere applicata per avere delle indicazioni di massima sulla scelta dei parametri di taglio che massimizzano la velocità di asportazione del materiale e mantengono stabile la lavorazione. Tuttavia sarebbe opportuno affiancare a tale approccio un sistema on-line per monitorare e diagnosticare l'insorgere delle vibrazioni di chatter durante le lavorazioni. Interfacciando tale sistema con il controllo numerico della macchina utensile o con l'operatore, sarebbe possibile individuare i parametri ottimali di taglio in ogni configurazione di macchina.

In questa sezione viene proposto un sistema di monitoraggio del chatter basato sull'elaborazione real-time dei segnali accelerometrici, provenienti da trasduttori posti sul mandrino, e del segnale di velocità angolare, proveniente dall'encoder del mandrino. Tale sistema è basato su un funzionale che indica l'insorgenza delle vibrazioni critiche per il processo di taglio e non necessita di un modello dinamico della macchina fresatrice. Il segnale di accelerazione  $x(t)$  proveniente da un accelerometro posto sul mandrino, in questo caso è stato scelto il sensore posto nel punto P6 di Figura 5, viene campionato con una frequenza di campionamento  $f_s$  in blocchi di durata  $T$  composti da un numero  $N$  di campioni pari a:

$$N = T f_s \quad (112)$$

Nelle prove eseguite sono stati scelti  $f_s = 12.8 \text{ kHz}$  e  $T = 2 \text{ s}$ , ottenendo blocchi, qui indicati come  $x(n)$ , formati da  $N = 51200$  campioni:

$$x(n) \quad \text{con} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (113)$$

A ciascun blocco viene applicata la trasformata discreta di Fourier ( $DFT$ )

$$X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (114)$$

implementata come Fast Fourier Transform ( $FFT$ ) nell'hardware utilizzato per acquisire i dati.

La capacità di funzionamento on-line del sistema è limitata dalle prestazioni dell'acquisitore/analizzatore digitale di spettro, in particolare dal massimo numero di punti  $N$  supportato per processare la  $FFT$  in real-time. La risoluzione in frequenza  $\Delta f$  e il vettore delle frequenze  $f(k)$  associati dello spettro (114) risultano:

$$\Delta f = \frac{1}{T} \quad (115)$$

$$f(k) = k \Delta f \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (116)$$

Alcuni esempi di spettri  $X(k)$  raccolti durante le prove di lavorazioni sono rappresentati nelle figure da Figura 23 a Figura 30. Viene definito il vettore  $f_H(j)$  delle frequenze armoniche discrete della velocità di rotazione del mandrino  $\Omega$ , i cui elementi vengono calcolati come i multipli della risoluzione in frequenza  $\Delta f$  che meglio approssimano le armoniche teoriche  $f_{om}$ , definite nell'equazione (15):

$$f_H(j) = \Delta f \text{ round} \left( \frac{j f_{om}}{\Delta f} \right) = \Delta f \text{ round} \left( \frac{j 2\pi \Omega}{\Delta f} \right) \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, j_{\max} \quad (117)$$

dove l'operatore *round* arrotonda all'intero più vicino, l'operatore *floor* arrotonda per difetto e il numero di armoniche contenute nella frequenza banda utile  $f_s/2$  è calcolato come:

$$j_{\max} = \text{floor} \left( \frac{f_s}{2 f_{om}} \right) \quad (118)$$

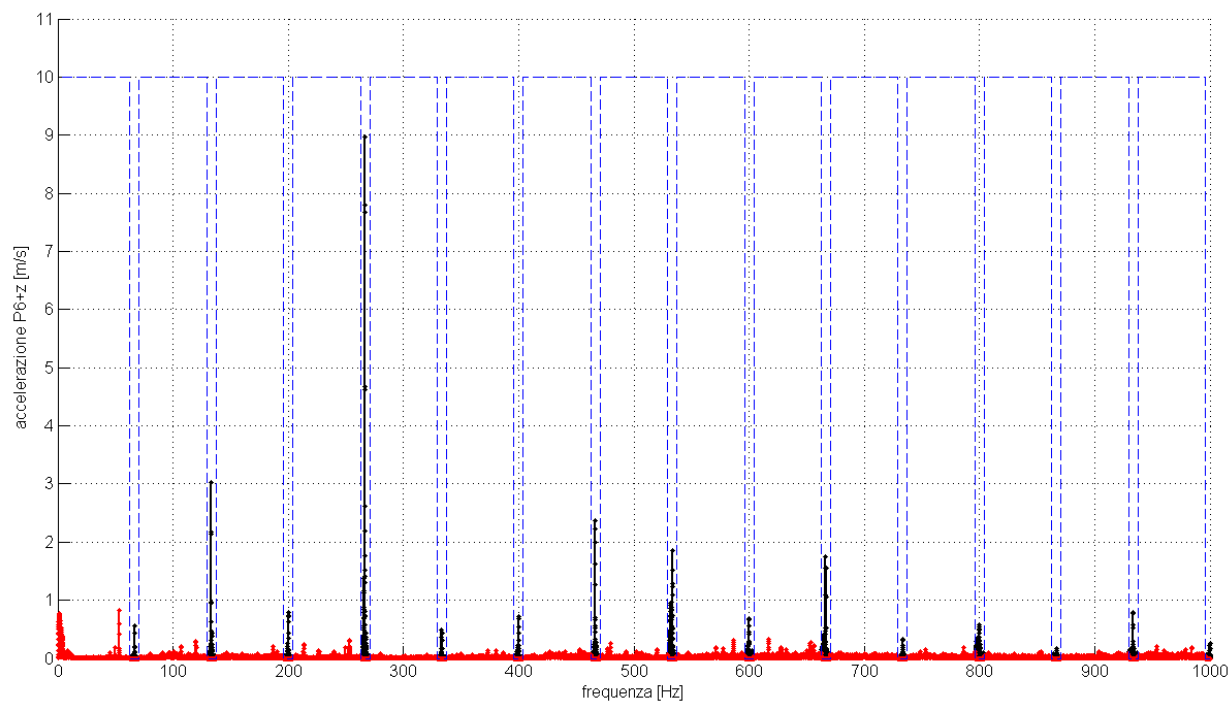
Si definisce un filtro  $H(k)$  che abbatti le componenti spettrali nell'intorno, di semiampiezza  $\Delta f_H$ , di ciascuna delle armoniche della velocità di rotazione  $f_H(j)$ :

$$H(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } f_H(j) - \Delta f_H < f(k) < f_H(j) + \Delta f_H \quad \forall j \in [1, j_{\max}] \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (119)$$

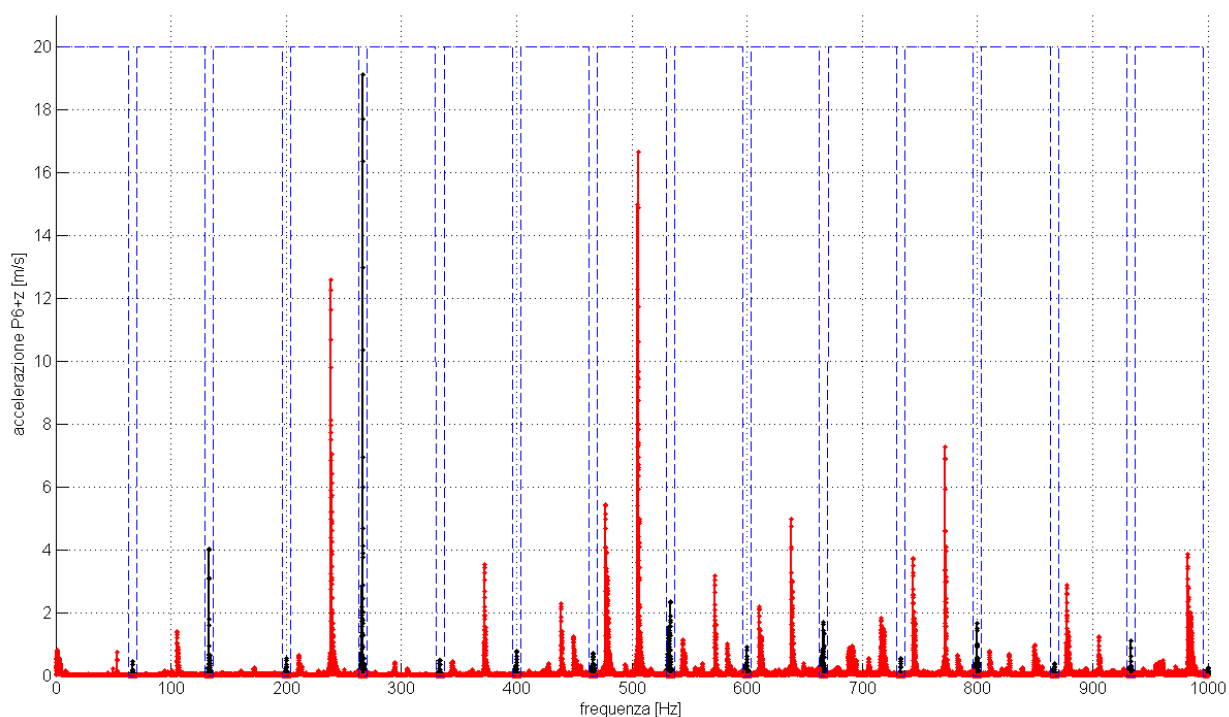
La tolleranza del filtro  $\Delta f_H$  viene stabilita dall'utente in base alla risoluzione in frequenza dello spettro acquisito e all'eventuale presenza di leakage, in questo caso è stata scelta una tolleranza pari a 5 Hz. Applicando il filtro abbatti armoniche al segnale di accelerazione si ottiene il segnale  $Y(k)$ :

$$Y(k) = H(k) \cdot X(k) \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (120)$$

che rappresenta una stima dello spettro delle componenti dell'accelerazione che non presentano una periodicità legata a  $f_{om}$ .



**Figura 37** Spettri dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione stabile a  $\Omega=4000$  rpm con  $\delta=1.1$  mm e  $a/D=25\%$ . In nero: spettro non filtrato. In rosso: spettro filtrato. La linea blu tratteggiata rappresenta il filtro.



**Figura 38** Spettri dell'accelerazione rilevata nel punto P6+z durante una lavorazione affetta da chatter severo a  $\Omega=4000$  rpm con  $\delta=2.0$  mm e  $a/D=25\%$ . In nero: spettro non filtrato. In rosso: spettro filtrato. La linea blu tratteggiata rappresenta il filtro.

Secondo quanto predetto dai modelli del processo di fresatura, e a quanto osservato nelle misure presentate nel paragrafo 3.3, le componenti  $Y(k)$  rappresentano le componenti della eventuale vibrazione di chatter della lavorazione. Nel caso in cui non si manifesti il chatter, e quindi in caso di lavorazione stabile, le componenti  $Y(k)$  sono composte solo da rumore e da eventuali frequenze di risonanza eccitate dalla forza di taglio (si manifestano solo in casi di impatti violenti in fase di ingaggio dei taglienti con il pezzo). Si è osservato sperimentalmente che il livello di tale rumore tende a crescere con l'intensità delle forze di taglio armoniche di  $f_{om}$ . In Figura 37 e in Figura 38 sono rappresentati in nero gli spettri non filtrati  $X(k)$ , in rosso gli spettri filtrati  $Y(k)$  e in blu i filtri  $H(k)$  per una lavorazione stabile e una instabile, eseguite ad una velocità angolare del mandrino  $\Omega=4000 \text{ rpm}$ . Nella banda passante i due spettri coincidono. Calcolando il valore efficace (RMS) dell'accelerazione della vibrazione rappresentata dal segnale non filtrato  $X(k)$ :

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N/2} X^*(k) \cdot X(k)}{N/2}} \quad (121)$$

e il valore efficace delle vibrazioni legate alle componenti non armoniche  $Y(k)$ , ovvero delle eventuali vibrazioni di chatter presenti nella lavorazione:

$$Y_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N/2} Y^*(k) \cdot Y(k)}{N/2}} \quad (122)$$

si valuta il funzionale che indica l'insorgenza del chatter, chiamato  $CI$  (chatter index), come rapporto:

$$CI = \frac{Y_{RMS}}{X_{RMS}} \quad (123)$$

Il  $CI$  assume valori intorno a 0.1-0.2 quando la lavorazione è stabile, ovvero quando la vibrazione di fresatura è una vibrazione forzata, mentre assume valori superiori a 0.4-0.5 quando la lavorazione è instabile, ovvero quando la vibrazione è autoeccitata.

Sfruttando la capacità dell'hardware utilizzato per le prove di eseguire le  $FFT$  in real-time, è stata implementato un sistema per valutare il  $CI$  durante le lavorazioni con una frequenza di aggiornamento di 10 Hz. È stato impostato un segnale di trigger sulla valutazione dell'indice solo nella fase effettiva di lavorazione, ovvero nella fase in cui la fresa è impegnata sul pezzo. Il valore di soglia dell'indice di chatter per distinguere lavorazioni stabili da quelle instabili è stato scelto come:

$$CI_{LIM} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad Y_{RMS} = \frac{X_{RMS}}{2} \quad (124)$$

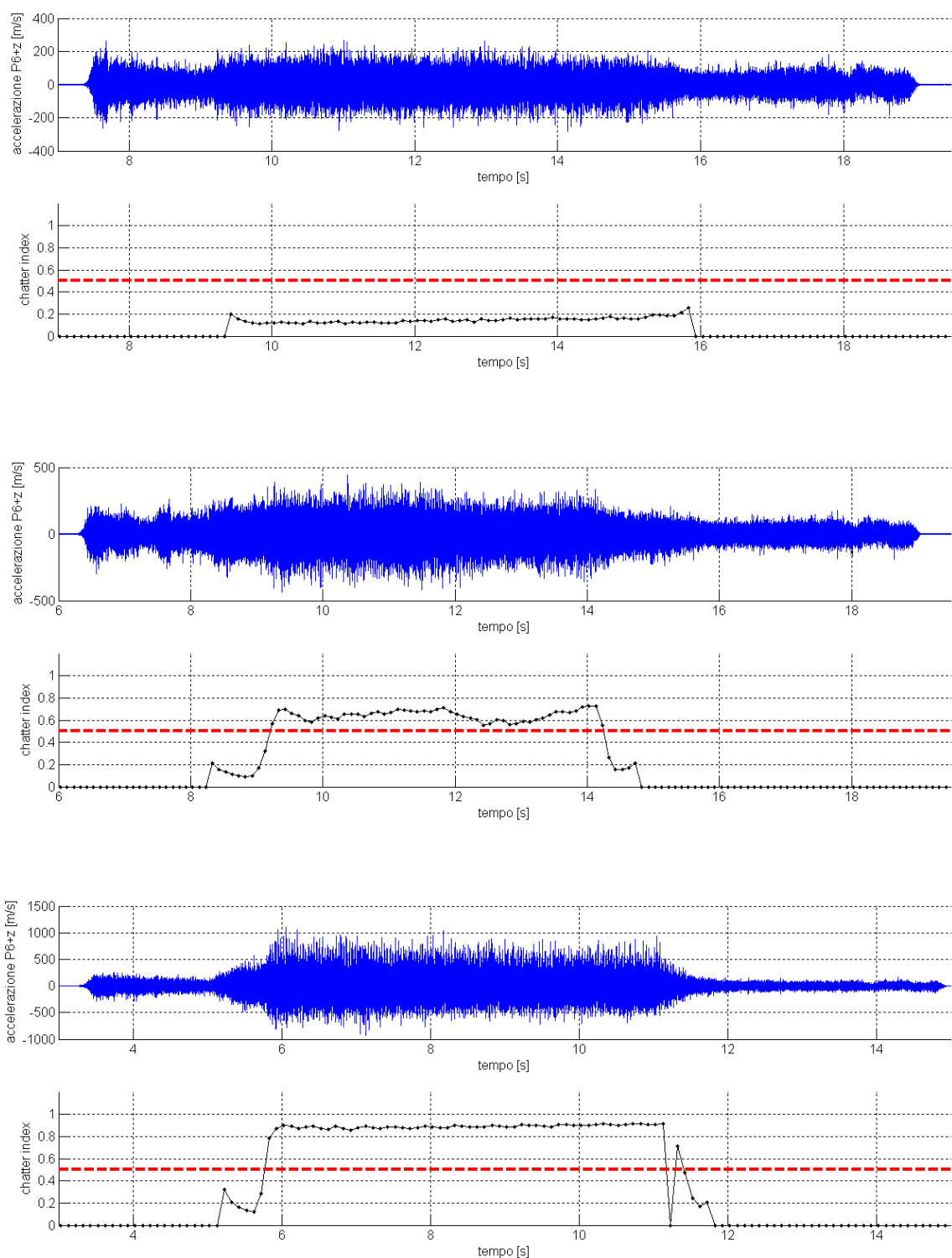
Tale valore di soglia è stato scelto osservando i valori assunti dal *CI* nelle varie prove eseguite: si è osservato che tale valore limite indica la comparsa di picchi di ampiezza rilevante (rispetto ai picchi osservati in corrispondenza delle armoniche della velocità di rotazione), in corrispondenza delle frequenze di chatter, negli spettri delle accelerazioni del mandrino. La condizione limite espressa nell'equazione (124) corrisponde all'insorgenza di quello che è stato in precedenza chiamato chatter leggero.

Il *CI* assume valori superiori al valore limite, tipicamente prossimi a 1, quando la lavorazione è affetta da quello che è stato in precedenza chiamato chatter severo. Gli andamenti dell'indice di chatter per una lavorazione stabile, una affetta da chatter leggero e una affetta da chatter severo, eseguite a 4000 *rpm*, sono rappresentati in Figura 39. Gli andamenti del funzionale di chatter riescono a quantificare in maniera corretta la stabilità della lavorazione eseguita: maggiore è l'intensità della vibrazione di chatter, più alto risulta il valore dell'indice di chatter.

In Figura 40 sono mostrati gli andamenti dell'indice di chatter e dell'accelerazione per tre lavorazioni stabili e una affetta da chatter leggero eseguite a 3250 *rpm*: si osserva come l'andamento del *CI* e la taratura del valore limite non dipendano dal livello delle vibrazioni, che varia con parametri di taglio, ma solo dalle caratteristiche di stabilità della vibrazione. Questo implica che tale strumento non richiede né tarature, né identificazioni del modello di macchina fresatrice e quindi può facilmente adattarsi a qualsiasi tipo di macchina utensile e lavorazione di fresatura.

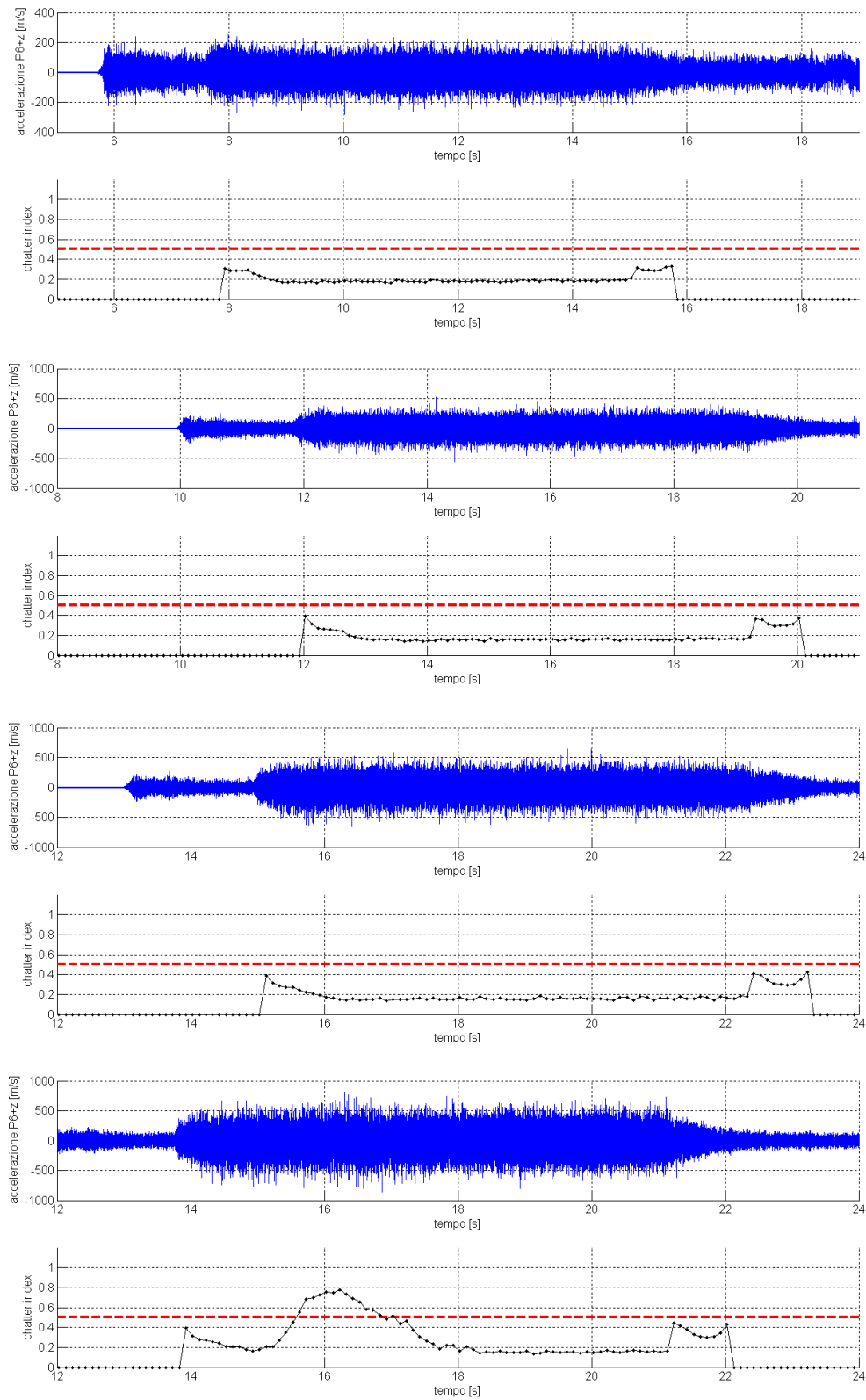
Si può osservare anche come il *CI* cresca in corrispondenza dell'ingaggio e del disingaggio della fresa con il pezzo: quando queste fasi sono eseguite velocemente tendono ad eccitare le frequenze di risonanza del sistema le quali, non essendo armoniche della velocità di rotazione del mandrino, fanno aumentare il valore del *CI*. L'eccitazione delle frequenze di risonanza provoca generalmente vibrazioni di ampiezza elevata che lasciano segni sulla superficie lavorata, per questo risulta utile che l'indice di chatter riesca a monitorare anche l'insorgere di tali fenomeni che comportano uno scadimento nella finitura superficiale del pezzo.

Osservando l'andamento dell'indice *CI* per la lavorazione instabile riportata in Figura 40, si nota come il chatter si possa innescare anche in una sola porzione della lavorazione, per questo è importante avere un monitoraggio on-line di tale fenomeno che consenta di intervenire sui parametri di taglio per evitare il manifestarsi delle vibrazioni critiche.



**Figura 39** Andamenti temporali delle accelerazioni rilevate nel punto P6+z e dell'indice di chatter durante tre lavorazioni a  $\Omega=4000 \text{ rpm}$  con  $\delta=1.1 \text{ mm}$  (stabile),  $\delta=1.4 \text{ mm}$  (chatter leggero),  $\delta=2.0 \text{ mm}$  (chatter severo) tutte eseguite con un rapporto di immersione  $a/D=25\%$ .





**Figura 40** Andamenti temporali delle accelerazioni rilevate nel punto P6+z e dell'indice di chatter durante quattro lavorazioni a  $\Omega=3250 \text{ rpm}$  con  $\delta=1.2 \text{ mm}$  (stabile),  $\delta=2.2 \text{ mm}$  (stabile),  $\delta=2.9 \text{ mm}$  (stabile),  $\delta=3.4 \text{ mm}$  (chatter) e  $a/D=25\%$ .

## Conclusioni

Il fenomeno del chatter in fresatura è stato studiato mediante modelli matematici e prove sperimentali eseguite su una macchina fresatrice CN opportunamente strumentata. Tramite i rilievi sperimentali, sono stati identificati i modelli a parametri concentrati a 2 gdl, utilizzati in numerosi studi presenti in letteratura, ed è stata implementata una procedura numerica per stimare le frequenze caratteristiche e mappare la stabilità del processo di fresatura. I diagrammi di stabilità ottenuti dai modelli a 2 gdl sono stati confrontati con i risultati sperimentali e sono state individuate alcune discrepanze quantitative. Confrontando le frequenze del processo di fresatura previste dai modelli a 2 gdl con gli spettri ottenuti dalle accelerazioni misurate durante il processo di fresatura sono state osservate delle discrepanze sia quantitative che qualitative. Negli spettri sperimentali compaiono infatti un numero più elevato di picchi rispetto a quanto previsto dai modelli: l'origine di tali picchi è stata spiegata grazie alle misure delle azioni di taglio eseguite tramite una tavola dinamometrica con cui è stata strumentata la macchina fresatrice.

È stato poi proposto e implementato un modello a  $n$  gdl analitico-sperimentale con il quale è stato possibile prevedere, con una buona accuratezza, l'andamento delle FRFs della macchina fresatrice in ciascuna configurazione utensile. Applicando a tale modello la procedura numerica per mappare la stabilità del processo di taglio, e confrontando i risultati ottenuti con i dati sperimentali, è stato osservato solo un parziale miglioramento, rispetto a quanto ottenuto con i modelli a 2 gdl, nelle predizioni di stabilità.

Sono state individuate alcune possibili cause degli errori nella previsione di stabilità ed è stata notata un'elevata sensibilità di tale previsioni sia rispetto ai parametri dei modelli utilizzati, sia rispetto alle cause di errore individuate. Per tali motivi si è concluso che il modello analitico-sperimentale proposto può essere utilizzato in applicazioni industriali solo per ottenere un orientamento di massima sulla scelta dei parametri di taglio che rendono stabili le lavorazioni. È stato proposto di affiancare a questa metodologia uno strumento di monitoraggio e diagnostica on-line delle vibrazioni di chatter basato sull'elaborazione dei segnali accelerometrici provenienti da trasduttori posizionati sul mandrino. Tale strumento è stato formulato mediante un funzionale in grado di indicare la tendenza all'instabilità della lavorazione indipendentemente da qualsiasi parametro che caratterizzi il modello di macchina fresatrice e di utensile. Un prototipo di tale strumento è stato realizzato e testato con successo su due diversi modelli di macchina fresatrice.

Si pensa che tale sistema di diagnostica possa, in un prossimo futuro, essere sviluppato, lavorando ad esempio sulla diminuzione del tempo di risposta, in modo da poter essere interfacciato con il controllo numerico della macchina fresatrice. Tale interfacciamento consentirebbe l'implementazione di procedure automatiche di scelta dei parametri di taglio in grado di massimizzare la velocità di asportazione del materiale, e quindi di diminuire il tempo di ciclo della lavorazione, senza compromettere la stabilità del processo, ovvero garantendo buone finiture superficiali e lunga vita agli utensili e ai componenti della macchina.



## Bibliografia

- [1] Y. Altintas, *Manufacturing Automation*, Cambridge University Press (2000).
- [2] C.S. Anderson, S.E. Semercigil, O.F. Turan, *A passive adaptor to enhance chatter stability for end mills*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 47 (2006).
- [3] I. Bediaga, J. Munoa, J. Hernandez, L.N. Lopez de Lacalle, *An automatic spindle speed selection strategy to obtain stability in high speed milling*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 49 (2009).
- [4] E. Budak, *An analytical design method for milling cutters with non constant pitch to increase stability part I: theory*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 125 (2003).
- [5] E. Budak, *An analytical design method for milling cutters with non constant pitch to increase stability part II: application*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 125 (2003).
- [6] M.L. Campomanes, Y. Altintas, *An improved time domain simulation for dynamic milling at small radial immersions* 2003, Journal of Manufacturing Science and Engineering 125 (2003).
- [7] Y. Cao, Y. Altintas, *Modeling of spindle bearing and machine tool systems for virtual simulation of milling operations*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 47 (2007).
- [8] W.T. Corpus, W.J. Endres, *Added stability lobes in machining processes that exhibit periodic time variation part 1: an analytical solution*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 126 (2004).
- [9] W.T. Corpus, W.J. Endres, *Added stability lobes in machining processes that exhibit periodic time variation part 2: experimental validation*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 126 (2004).
- [10] M.A. Davies, J.R. Pratt, B. Dutterer, T.J. Burns, *Stability prediction for low radial immersion milling*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 124 (2002).
- [11] J.L. Dohner, J.P. Lauffer, & al. *Mitigation of chatter instabilities in milling by active structural control*, Journal of Sound and Vibration 269 (2002).
- [12] A. Erturk, E. Budak, H.N. Ozguven, *Selection of design and operational parameters in spindle holder tool assemblies for maximum chatter stability by using a new analytical model*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 47 (2007).
- [13] A. Erturk, H.N. Ozguven, E. Budak, *Analytical modeling of spindle-tool dynamics on machine tools using Timoshenko beam model and receptance coupling for the prediction of tool point FRF*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 46 (2006).

- [14] A. Erturk, H.N. Ozguven, E. Budak, *Effect analysis of bearing and interface dynamics on tool point FRF for chatter stability in machine tools*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 47 (2007).
- [15] R.P.H. Faassen, N. van de Wouw, J.A.J. Oosterling, H. Nijmeijer, *Prediction of regenerative chatter by modeling and analysis of high speed milling*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 43 (2003).
- [16] R.P.H. Faassen, *Modelling and detection of machine tool chatter in high speed milling*, presentazione TU/e e TNO (2006).
- [17] R.P.H. Faassen, N. van de Wouw, J.A.J. Oosterling, H. Nijmeijer, *Modelling of Highspeed Milling for Prediction of Regenerative Chatter*, dal sito <http://www.dct.tue.nl>.
- [18] R.P.H. Faassen, *Online detection of the onset and occurrence of machine tool chatter in milling processes*, dal sito <http://www.dct.tue.nl>.
- [19] R.P.H. Faassen, *Chatter Prediction and Control for High speed Milling*, PhD thesis (2007).
- [20] R.P.H. Faassen, *Updated tool path modelling with periodic delay for chatter prediction in milling*, proceedings of ENOC-2005, Eindhoven, Netherlands, (2005).
- [21] M. Floquet *Equations differentielles lineaires a coefficients periodiques*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 12:47–89, (1883).
- [22] V. Gagnol, B.C. Bouzgarrou, P. Ray, C. Barra, *Model-based chatter stability prediction for high-speed spindles*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 47 (2007).
- [23] V. Gagnol, B.C. Bouzgarrou, P. Ray, C. Barra, *Stability-based spindle design optimization*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 129 (2004).
- [24] A. Ganguli, A. Deramemaeker, & al. *Simulation and active control of chatter in milling via a mechatronic simulator*, Journal of Vibration and Control, 12(8). (2005).
- [25] A. Ganguli, *Chatter reduction through active vibration damping*, PhD thesis (2005).
- [26] Z. Geng, K. Ridgway, S. Turner, *Linear improvement of the machining stability lobes and application in milling process prediction*, Proc. IMechE Vol. 221 Part B: J. Engineering Manufacture (2007).
- [27] J. Gradisek, A. Baus, E. Govekar, F. Klocke, I. Grabec, *Automatic chatter detection in grinding*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 43 (2003).

- [28] J. Gradisek, M. Kalveram, & al. *Mechanistic identification of specific force coefficients for a general end mill*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 45 (2005).
- [29] J. Gradisek, M. Kalveram, T. Insperger, K. Weinert, G. Stépán, E. Govekar, I. Grabec, *On stability prediction for milling*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 45 (2005).
- [30] T. Insperger, B.P. Mann, G. Stépán, P.V. Bayly, *Stability of up-milling and down-milling part 1: alternative analytical method*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 43 (2003).
- [31] T. Insperger, B.P. Mann, G. Stépán, P.V. Bayly, *Stability of up-milling and down-milling part 2: experimental verification*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 43 (2003).
- [32] T. Insperger, B.P. Mann, T. Surmann, G. Stépán, *On the chatter frequencies of milling processes with runout*, International Journal of Machine Tools and Manufacture 48 (2008).
- [33] T. Insperger, G. Stépán, P.V. Bayly, B.P. Mann, *Multiple chatter frequencies in milling processes*, Journal of Sound and Vibration 262 (2003).
- [34] T. Insperger, G. Stépán, *Semi discretization method for delayed system*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 55 (2002).
- [35] T. Insperger, G. Stépán, *Update semi discretization method for dde*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 61 (2004).
- [36] T. Insperger, G. Stépán, *Vibration frequencies in high speed milling processes or a positive answer to Davies Pratt Dutterer and Burns*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 126 (2004).
- [37] S. Khachan, F. Ismail, *Machining chatter simulation in multi-axis milling using graphical method*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 49 (2009).
- [38] D. Koenigsberger, J. Tlustý, *Machine tool structures Volume 1*, Pergamon Press (1970).
- [39] E. Kulijanac, G. Totis, M. Sortino, *Development of an intelligent multisensory chatter detection system in milling*, Mechanical Systems and Signal Processing 23 (2009).
- [40] E. Kulijanac, M. Sortino, G. Totis, *Multisensor approaches for chatter detection in milling*, Journal of Sound and Vibration 312 (2008).
- [41] M. Liang, T. Yeap, A. Hermansyah, *A fuzzy system for chatter suppression in end milling*, Proc. Instn Mech. Engrs Vol. 218 Part B: J. Engineering Manufacture (2004).
- [42] X. Long, B. Balachandran, *Stability analysis for milling process*, Nonlinear Dyn 49 (2007).

- [43] X. Long, B. Balachandran, B.P. Mann, *Dynamics of milling processes with variable time delays*, Nonlinear Dyn 47 (2007).
- [44] I. Mane, V. Gagnol, B.C. Bouzgarrou, P. Ray, *Stability-based spindle speed control during flexible workpiece high-speed milling*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 48 (2008).
- [45] B.P. Mann, P.V. Bayly, M.A. Davies, J.E. Halley, *Limit cycles bifurcations and accuracy of the milling process*, Journal of Sound and Vibration 277 (2004).
- [46] B.P. Mann, P.V. Bayly, M.A. Davies, J.E. Halley, *Stability of interrupted cutting by temporal finite element analysis*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 125 (2003).
- [47] B.P. Mann, B.T. Edes, S.J. Easley, K.A. Young, K. Ma, *Chatter vibration and surface location error prediction for helical end mills*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 48 (2008).
- [48] S.D. Merdol, Y. Altintas, *Multi Frequency Solution of Chatter Stability for Low Immersion Milling*, Journal of Manufacturing Science and Engineering 126 (2004).
- [49] G. Morgan, R.Q. Cheng, Y. Altintas, K. Ridgway, *An expert troubleshooting system for the milling process*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 47 (2007).
- [50] O. Ozssahin, A. Erturk, H.N. Ozguven, E. Budak, *A closed-form approach for identification of dynamical contact parameters*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 49 (2009).
- [51] S.S. Park, Y. Altintas, M. Movahhedy, *Receptance coupling for end mills*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 43 (2003).
- [52] B.R. Patel, B.P. Mann, K.A. Young, *Uncharted islands of chatter instability in milling*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 48 (2008).
- [53] G. Quintana, J. Ciurana, D. Teixidor, *A new experimental methodology for identification of stability lobes diagram in millig*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 48 (2008).
- [54] A. Rashid, C.M. Nicolescu, *Design and implementation of tuned viscoelastic dampers for vibration control in milling*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 48 (2008).
- [55] M. Salahshoor, H. Ahmadian, *Continuous model for analytical prediction of chatter in milling*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 49 (2009).
- [56] T.L. Schmitz, K. Powell, D. Won, G.S.Duncan, W.G. Sawyer, J.C. Ziegert, *Shrink fit tool holder connection stiffness damping modeling for frequency response prediction in milling*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 47 (2007).

- [57] S. Seguy, G. Dessein, L. Arnaud, *Surface roughness variation of thin wall milling, related to modal interactions*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 48 (2008).
- [58] L. F. Shampine, S. Thompson, *Solving DDEs in Matlab*, Applied Numerical Mathematics 37 (2001).
- [59] N.D. Sims, P.V. Bayly, K.A. Young, *Piezoelectric sensors and actuators for milling tool stability lobes*, Journal of sound and Vibration 281 (2005).
- [60] G. Stépán, *Retarded Dynamical Systems*, Longman: Harlow (1989).
- [61] G. Stépán, *How delay equations arise in engineering*, presentazione.
- [62] G. Stépán, R. Szalai, B.P. Mann, & al. *Nonlinear dynamics of high-speed milling analyses numerics and experiments*, journal of Vibration and Acoustics 127 (2005).
- [63] S.A. Tobias, *Machine-tool vibration*, Blackie & Son (1965).
- [64] G. Totis, *RCPM-A new method for robust chatter prediction in milling*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 49 (2009).
- [65] I. Zaghabani, V. Songmene, *Estimation of machine-tool dynamic parameters during machining operation*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 49 (2009).
- [66] M.X.Zhao, B. Balachandran, *Dynamics and stability of milling process*, International Journal of Solids and Structures 38 (2001).



## **Ringraziamenti**

Si ringraziano la Regione Emilia-Romagna, che ha contribuito al finanziamento di questa ricerca attraverso il progetto PRITT, e l'azienda Giuliani (Bucci Industries), in particolare l'Ing. Landi, l'Ing. Cusumano e l'Ing. Rizzoli, per il preziosissimo supporto.